

**IOAN CRĂCIUNEL
LILIANA NICULESCU
PETRE SIMION
TIBERIU SPIRU**

ALGEBRĂ

VIII

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

IOAN CRĂCIUNEL
PETRE SIMION

LILIANA NICULESCU
TIBERIU SPIRCU

Matematică



Algebră

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

CAPITOLUL 1.

NUMERE

1. EXERCITII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Reamintiți-vă proprietățile operațiilor cu numere. Efectuați :

a) $(214 + 437) \cdot 12 - 45$; b) $214 + 437 \cdot (12 - 45)$; c) $428 \cdot 41 - (312 \cdot 41 + 16 \cdot 41)$; d) $83 \cdot 815 + 815 \cdot 22 - 95 \cdot 815$.

2) Descompuneți în factori primi numerele naturale :

a) 2904; b) 1539; c) 2156; d) 2475.

3) Un muncitor care lucrează la o mașină câștigă 12 lei într-o oră pentru executarea în acest timp a 60 de piese. Fiecare piesă are prețul de cost de 1,25 lei. Care este procentajul manoperei în prețul de cost al piesei ?

4) Pentru a obține un aliaj se topesc împreună 92 kg de cupru și 5 kg de aluminu. După îndepărtarea zgurei, se obține un lingou cu masa de 90 kg. Cât costă kilogramul de aliaj, știind că aluminiul costă 28,20 lei/kg, cuprul costă 50,75 lei/kg, iar cheltuielile de topire (energie, manoperă) se ridică la 320 lei ?

5) Efectuați :

a) $(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5)$; b) $(+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5)$; c) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (+5)$; d) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+5)$; e) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$.

6) Scrieți în formă zecimală numerele :

a) $\frac{11}{4}$; b) $\frac{82}{50}$; c) $-\frac{148}{25}$; d) $\left(\frac{8}{15} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{18}{8-5}$

7) Efectuați, scriind rezultatul în formă zecimală :

a) $\left(-\frac{16}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) \cdot \left(-\frac{9}{14}\right) \cdot \left(+\frac{49}{12}\right)$; b) $(-1,2) \cdot (+2,1) \cdot (-3,7) \cdot (+4,5)$.

2. RIDICAREA LA PUTERE

Ne-am obișnuit să notăm 5^2 în loc de $5 \cdot 5$; $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$ în loc de $\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$; $0,2^4$ în loc de $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$. În general, dacă a este un număr real, notăm cu a^n numărul:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

n factori

și citim „ a ridicat la puterea a n -a”. În această notație, a este **baza** puterii, iar n este **exponentul** puterii.

Notația de mai sus este adecvată pentru orice număr natural $n \geq 2$. Pentru $n = 1$ vom considera că $a^1 = a$. De asemenea, vom admite că $a^0 = 1$, pentru orice număr real $a \neq 0$.

EXERCITII

1) Completați tabelul de mai jos, cu puterile a^n :

$a \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
2		8	16	32	64	128	256
3		27	81	243	729	2187	6561
4		64	256	1024	4096	16384	65536
5		125	625	3125	15625	78125	390625

2) Calculați:

a) $(-2)^4$; b) -2^4 ; c) $(-1)^5$; d) $1,5^3$; e) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

3) Calculați suma puterilor 2^n cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; comparați cu puterea 2^6 ; ce observați?

4) a) Calculați suma puterilor $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; comparați cu 2.

b) Calculați suma puterilor $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; comparați cu 2. Ce observați?

Să scriem puterile ce au ca bază pe 10. Avem $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, apoi $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$, $10^4 = 10\,000$. Să observăm că exponentul unei puteri de acest fel ne arată numărul de cifre 0 ce apar după cifra 1, în scrierea zecimală a puterii.

Preferăm să folosim notația 10^9 în loc de 1 000 000 000 (un miliard!), deoarece este mai „economică”.

Ridicarea la putere poate fi gândită ca o operație: fiind date un număr real a și un număr natural n (cel puțin unul dintre ele $\neq 0$), din ele obținem un nou număr real, notat a^n . Mai nou se folosește și notația $a^{**}n$, tocmai pentru a scrie în evidență semnul de operație „ ** ”.

Ridicarea la putere este o operație de ordinul al III-lea; ea se execută deci înainte de efectuarea înmulțirilor și împărțirilor (care sînt operații de ordinul al II-lea). Așadar, vom scrie: $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$; $2,1 \cdot 10^5 = 21\,000$ etc.

EXERCITII

- 1) (oral) Ordonati crescător puterile: $\left(\frac{1}{2}\right)^7$, $\left(\frac{1}{2}\right)^8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.
- 2) (oral) Știm că $a^7 = -0,7$ și că $a \in \mathbb{R}$. Conștetiți semnul lui a ?
- 3) Reprezentați pe o axă puterile a^n cu $a = 1,2$ și $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. (Indicație: luați unitatea de măsură de 5 cm.)
- 4) Reprezentați pe o axă puterile a^n cu $a = 0,8$ și $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Este adevărată propoziția: „dacă $n > m$, atunci $a^n > a^m$ ”? (Indicație: luați unitatea de măsură de 10 cm.)
- 5) Reprezentați pe o axă puterile a^n cu $a = -0,9$ și $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ce observați?
- 6) Calculați:
 - a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; c) $(-0,1)^2$; d) $(-0,1)^3$; e) $(-0,1)^4$.
- 7) Calculați:
 - a) $\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^2$; c) $(-1 + 0,1)^4$.
- 8) Care număr este mai mare:
 - a) $7 + 4^3$ sau $(7 + 4)^3$; b) $7^3 + 4^3$ sau $(7 + 4)^3$; c) $5 + 6^3$ sau $(5 + 6)^3$; d) $\frac{1}{2} + 6^3$ sau $\left(\frac{1}{2} + 6\right)^3$;
 - e) $(4^3)^6$ sau 4^{3^6} ?

3. PROPRIETĂȚILE RIDICĂRII LA PUTERE

Să luăm ca bază numărul -2 și să-i calculăm puterile. Avem: $(-2)^0 = +1$; $(-2)^1 = -2$; $(-2)^2 = +4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = +16$ și așa mai departe. Observăm că semnele alternează: pentru exponenții pari semnul este $+$, iar pentru exponenții impari semnul este $-$.

În general, dacă $a < 0$, atunci:

a^n este $\begin{cases} \text{pozitiv, dacă } n \text{ este par,} \\ \text{negativ, dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

Dacă $a > 0$, atunci a^n este pozitiv pentru orice n .

Pentru $a = 0$, avem: $0^n = 0$, pentru orice $n \geq 1$. Scrierea 0^0 nu este acceptată ca scriere a vreunui număr real.

EXERCITII

1) (Oral) Stabilizi semnul puterii :

a) $(-3)^{12}$; b) $(-5)^3$; c) $(+2)^8$; d) 3^5 ; e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}$.

2) Pentru ce $n \in \mathbb{N}$ avem $(-2)^n \leq 0$? Dar $(-2)^{2n+1} > 0$?

Să privim cu atenție rîndul ce urmează :

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Deci putem scrie că $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 2^{3+4}$.

În general, fie a un număr real $\neq 0$, iar m și n numere naturale. Atunci :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

deoarece :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ factori}}$$

Dacă $a = 0$, atunci $0^m \cdot 0^n = 0^{m+n}$ pentru $m, n \geq 1$.

Regula I

Produsul a două puteri avînd aceeași bază este o putere cu aceeași bază, în care exponentul este suma exponenților factorilor.

EXERCITIU

Scrieți ca putere :

a) $3^2 \cdot 3^5$; b) $9^4 \cdot 9$; c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7$; d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; e) $(-8)^4 \cdot 8^5$; f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1$.

EXERCITIU REZOLVAT

Să calculăm puterea $(-0,3)^8$.

Rezolvare. Scriem $(-0,3)^8 = (-0,3)^2 \cdot (-0,3)^2$; apoi $(-0,3)^2 = (-0,3)^2 \cdot (-0,3)^2$ și $(-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3) = 0,09$. Deci $(-0,3)^2 = 0,09 \cdot 0,09 = 0,0081$ apoi $(-0,3)^8 = 0,0081 \cdot 0,0081 = 0,00006561$.

Să observăm că am efectuat trei înmulțiri ! Dacă am fi calculat respectînd formula : $(-0,3)^8 = \underbrace{(-0,3) \cdot (-0,3) \cdot \dots \cdot (-0,3)}_{8 \text{ factori}}$, ar fi trebuit să efectuăm șapte înmulțiri.

8 factori

EXERCITII

1) Calculați :

a) 2^{12} ; b) $-0,1^8$; c) $(-0,8)^8$; d) $\left(-\frac{3}{5}\right)^8$; e) $\left(-1-\frac{1}{2}\right)^8$; f) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)^8$, efectuând cel mai puține calcule.

2) Puteți calcula a^8 efectuând patru înmulțiri ? Cum ?

Fie numărul $(5^2)^3$. Putem scrie :

$$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}$$

În general, fie a un număr real $\neq 0$, iar m și n numere naturale. Atunci :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

deoarece :

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)}_{n \text{ factori}} = \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ factori}} \\ &\quad n \text{ grupe de câte } m \text{ factori} \end{aligned}$$

Dacă $a = 0$, atunci $(0^m)^n = 0^{m \cdot n}$ pentru orice $m, n \geq 1$.

Regula a II-a

O putere a unui număr real se ridică la putere păstrând baza, iar exponentul se obține efectuând produsul exponenților.

EXERCITII

1) Scrieți ca putere :

a) $(5^2)^3$; b) $((-5)^2)^3$; c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$; d) $\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3\right\}^4$; e) $(3^{\sqrt{2}} \cdot 3^3)^5$; f) $(0,4^3 \cdot 0,4^2)^7$; g) $11^8 \cdot 11^2 \cdot (11 \cdot 11^2)^2$.

2) Calculați :

a) $((-1,1)^2)^3$; b) $((-5)^3)^2$; c) $((-0,7)^2)^3$; d) $(-3)^2 \cdot (-2)^3$; e) $1,6^2 \cdot 0,5^2 \cdot (-2,5)^2$.

3) Care dintre numerele $(-1,3)^4$ și $(+1,4)^3$ este mai mare ?

Fie numărul $(4 \cdot 5)^3$. Putem scrie :

$$(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 4^3 \cdot 5^3$$

În general, fie a și b două numere reale (diferite de 0), iar n un număr natural. Atunci :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

deoarece :

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ factori}}$$

Regula a III-a

Pentru a ridica la putere produsul a două numere, ridicăm fiecare dintre factori la acea putere, apoi înmulțim rezultatele obținute.

Aplicând de două ori formula de mai sus, obținem :

$$(a \cdot b \cdot c)^n = [(a \cdot b) \cdot c]^n = (a \cdot b)^n \cdot c^n = (a^n \cdot b^n) \cdot c^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n;$$

la fel pentru un produs de mai mulți factori.

Observație. În calcule formula $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ este folosită de obicei astfel :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n;$$

În loc de a efectua două ridicări la putere și o înmulțire, efectuăm doar o înmulțire și o ridicare la putere ; acest mod de calcul este avantajos în special în lucrul cu calculatoarele electronice.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1) Calculați :

a) $(0 \cdot 3)^2$; b) $2^3 \cdot 5^3$; c) $(-2)^3 \cdot (-5)^3$; d) $8^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3$; e) $(-4)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3$; f) $(-3)^3 \cdot (-1)^3$;

2) Scrieți ca putere, cu exponentul cel mai mare :

a) $9^3 \cdot 4^3$; b) $9^3 \cdot 3^3$; c) $2^3 \cdot 4^3 \cdot (-1)^3 \cdot 8$;

3) Calculați :

a) $4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$; b) $4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$; c) $4^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^a$. Ce observați ? Este adevărat că $4^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$? Dovediți !

4) a) Ionică a depus la CEC, în ziua de 30 decembrie 1978, suma de 1 000 lei. Pentru sumele depuse, CEC-ul acordă o dobândă de 5% anual ; deci, la 30 decembrie 1979, Ionică avea la CEC suma de $1\,000 + \frac{5}{100} \cdot 1\,000 = 1\,050$ lei. La 30 decembrie 1980, Ionică avea la CEC $1\,050 + \frac{5}{100} \cdot 1\,050 = 1\,102,50$ lei. Puteți spune ce sumă avea la CEC Ionică, la 30 decembrie 1982,

deci la 4 ani de la data depunerii ? (Presupunem că nu a retras bani, nici nu a depus alți bani.)

b) Calculați $1\,000 \cdot (1,05)^4$. Ce observați ?

5) Un brad în vîrstă de 5 ani are înălțimea de 100 cm. În fiecare an bradul crește în înălțime cu 20%. Ce înălțime va avea bradul la vîrstă de 10 ani ? (Exprimați în centimetri.)

6) Calculați :

a) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$; c) $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$; d) $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$; Scrieți rezimul rezultatele obținute

7) Efectuați :

a) $(-2ab)^3$; b) $a^3 \cdot (-a)^3$; c) $(-a)^2 \cdot (-a)^2$; d) $a^3 \cdot a^{2n}$; e) $x - x^2 + x^3 - x^4$; f) $(-d^2)^{2n}$.

8) Calculați cu mai economie :

$$a) 5,04^3 \cdot 0,25^3 ; b) \left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 ; c) \left(-\frac{7}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^7 \cdot (-2)^7.$$

9) Un cub are lungimea muchiei egală cu a cm, iar altul are lungimea muchiei de două ori mai mare. Comparați volumele celor două cuburi. Al treilea cub are lungimea muchiei egală cu $3a$ cm. Este adevărat că are volumul de trei ori mai mare decât volumul celui de-al doilea cub ?

10) Un cub din plumb, cu lungimea muchiei de 1 dm, cântărește 11,3 kg. Cât cântărește un cub din plumb ce are lungimea muchiei de 2 dm ? Ați putut să-l ridicați cu brațele ?

11) Comparați între ele numerele :

$$a) 2^{100} \text{ și } 3^{100} ; b) 10^{100} \text{ și } 100^{100}.$$

4. PUTERI CU EXPONENT (ÎNTREG) NEGATIV

Orice număr real $a \neq 0$ are un invers; acesta este numărul, notat $\frac{1}{a}$, ce are proprietatea că :

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

De exemplu, deoarece $2 \cdot 0,5 = 1$, inversul lui 2 este 0,5 ; scriem $\frac{1}{2} = 0,5$. Inversul lui 0,4 este 2,5, deoarece $0,4 \cdot 2,5 = 1$; scriem $\frac{1}{0,4} = 2,5$. Inversul lui 1 este 1.

Observație. Inversul lui $\frac{1}{a}$ este a , căci $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$.

Să ne reamintim faptul că împărțirea numerelor reale se definește cu ajutorul înmulțirii :

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \quad (\text{dacă } b \neq 0).$$

De aceea,

$$(a : b)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n.$$

Așadar, $(a : b)^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n : b^n$.

Observație. Pentru cuburi vom folosi formula $a^n : b^m = (a : b)^n$, care se poate scrie și așa :

$$\frac{a^n}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \quad \text{Efectuăm astfel un nou mod nou de operare}$$

EXERCITII

1) (oral) Calculați:

a) 2^{-3} b) 3^{-1} c) 4^{-2} d) 5^{-1} e) 2^{-2} f) $(1,5)^{-2}$

2) Calculați:

a) $(-3)^{-2}$ b) $(-5)^{-1}$ c) $(-1)^{-3}$ d) $(-1)^{-4}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$

h) $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{1}{2}, -3\right)^{-1}$ g) $5^2 \cdot 10 \cdot 8^2$ h) 8^4 i) $(-0,4)^{-1}$

3) Scrieți ca putere, cu exponentul negativ:

a) $\frac{1}{10^3}$ b) $\frac{1}{5^2}$ c) $\frac{1}{10.000}$ d) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{1}{16}$

4) Scrieți ca putere, cu bazele indicate:

a) 32, 16, 8, 4, 2, 1 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ cu baza 2

b) $\frac{1}{625}, \frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, 625$ cu baza 5

c) $\frac{1}{10.000}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1.000, 10.000$ cu baza 10

5) Arătați că:

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ c) $0,6 = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$ d) $1,5^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

6) Scrieți ca puteri, învățate mai înainte:

De exemplu,

$$(-2)^{-1} = (-2)^{-1}$$

sau

$$(-2)^{-4+3} = (-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^1}, \text{ deci } (-2)^{-1} = (-2)^{-1} = (-2)^{-4+3}$$

În general,

pentru orice număr real $a \neq 0$ și orice numere întregi m și n

EXERCITII

1) Calculați:

$$(-3)^{-1} \cdot (-5)^{-1} \cdot (-2)^{-1} \text{ și } 25^2 \cdot 5^{-2}$$

2) Scrieți ca puteri:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

Pentru a) și b) scrieți $5^{-10+2} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Observăm că $(2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

EXERCISE III

1) Calculate

a) $(2^1 - 4^1)$ b) $(36^1 - 1^1)$ c) $(-0,5)^1 - 4^1$ d) $0^1 \cdot 10^1$ e) $(-2)^1 - (-2)^1$

2) Scrieți sub formă de enunț:

5. APLICATII

fraction. Mais, précis, débattre

67

putem înlocui serierea $\frac{a}{b}$ prin ab^{-1}

In particular, $\frac{3}{10} = 3 \cdot 10^{-1}$; $\frac{7}{100} = 7 \cdot 100^{-1} = 7 \cdot 10^{-2}$; $\frac{2}{1000} =$

FEBRUARY 1988

Se rietà d'ia bono de troche (p. 164, v. 104b)

a)	b)	c)	d)	e)
111	130000	110000	7	25

Am învățat în clasa a V-a că, de exemplu, 524,367 înseamnă

$$= 10 + 2 \cdot 10 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}.$$

1. Numărul de locuitori de la începutul anului 2000 este de 1000 de persoane. În anul 2001 populația este de 1050 de persoane, în anul 2002 este de 1100 de persoane, în anul 2003 este de 1150 de persoane, în anul 2004 este de 1200 de persoane, în anul 2005 este de 1250 de persoane, în anul 2006 este de 1300 de persoane, în anul 2007 este de 1350 de persoane, în anul 2008 este de 1400 de persoane, în anul 2009 este de 1450 de persoane, în anul 2010 este de 1500 de persoane, în anul 2011 este de 1550 de persoane, în anul 2012 este de 1600 de persoane, în anul 2013 este de 1650 de persoane, în anul 2014 este de 1700 de persoane, în anul 2015 este de 1750 de persoane, în anul 2016 este de 1800 de persoane, în anul 2017 este de 1850 de persoane, în anul 2018 este de 1900 de persoane, în anul 2019 este de 1950 de persoane, în anul 2020 este de 2000 de persoane.

$$5 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2} = 0.01 + 0.02 + 0.04 = 0.07$$

„mici” decât cele cu care sîntem obișnuiți

[illegible]

se utilizeaza mult scrierea standard a numerelor reale.

această ultimă schemă este scrisă standard a

Dacă x este un număr real, atunci x este punct pe axa punctelor A respectiv B atunci și intervalului datat $[a, b]$, unde $a \leq x \leq b$, punctul x este pe segmentul AB (vezi figura 2).



Fig. 1.2

Intervalul $[a, b]$ este cel cuprins de a și b și este notat $[a, b]$ și poate fi totdeauna multitudine $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. (Fig. 1.3)

EXERCITIUL REZOLVAT

Să scriem într-o formă mai simplă mulțimile :

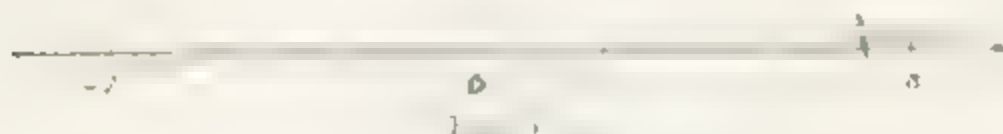
$$[-7, 3] \cup [0, 8] \text{ și } [-7, 3] \cap [0, 8]$$

Reamintim că dacă A și B sînt mulțimi, atunci

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \text{ iar } A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

Să reprezentăm A și B pe axa punctelor. Să reprezentăm pe axa punctelor $A \cup B$ și $A \cap B$. Reamintim că $A \cup B$ este mulțimea cuprinsă de una dintre intervale; deci :

$$[-7, 3] \cup [0, 8]$$



Intersecția $A \cap B$ este cuprinsă de 0 și 3 și este notată $A \cap B$. Deci :

$$[-7, 3] \cap [0, 8] = [0, 3]$$

EXERCITII

10.18. Să scriem într-o formă mai simplă, pentru a, b din par. 2, intervalele

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right] \cup [2, 4, 2, 5]$$

⁸ este valoarea de adevăr a propozițiilor
$$1 = 1 + 0 \cdot (10^{-3}) + 4 \cdot 5 \cdot (10^{-12}) + 4 \cdot 4 \cdot (10^{-12}) + \dots$$

3) Annahme: a durch $a \leq b$ abwärts

[, $\frac{d \cdot m}{20}$]

$$a \mid a-1, a \mid a+1 \Rightarrow a \mid (a-1) + (a+1) = 2 \Rightarrow a \mid 2 \Rightarrow a = 1, 2$$

Electrode

а) $[2, 9]$, б) $[0, 7]$, в) $[1, 3]$, г) $[1, 2]$, д) $[1, 2]$, е) $[1, 10]$.

$$c) [y - 1, a] = \{a, a + 1\} \cap \{1^*\} = \{a, a\} = \{1, 1\} \text{ pentru } a > 0$$

7) Precizați elementele noțiunii

8) Care mase poate să satisfacă condițiile $X = [1, 4] \cup [5, 6] \cup [7, 8] \cup [9, 10]$? Soluția este unică ?
 9) Dacă sistemul $X \in [0, 1]$ are interval ?

Care interval for β_2 and phreatic and runoff conditions

$$\{a, b\} \quad [1, 7] \quad [1, 9] \text{ и } [a, b] \quad [3, 7] \quad [5, 7].$$

multinomial

32

1. $\text{Cost}(d)$ is the cost of the decision d (for $d \in \mathcal{D}$) corresponds to each multiclass problem.



144

EXERCITI' RIZOLVAT

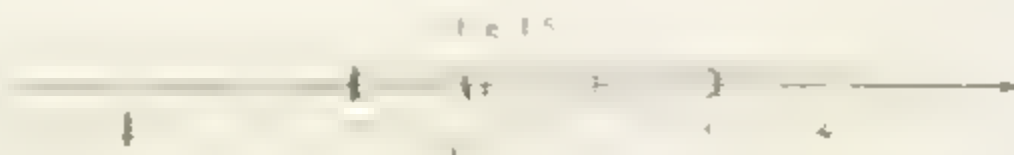
Su scriem într-o formă mai simplă multumile :

$$(-2, 3) \cup (0, 4) \text{ and } (-2, 3) \cap (0, 4)$$

1. The first part of the document is a list of names and titles, including "The Hon. Mr. Justice" and "The Hon. Mr. Justice".

intersecția celor două intervale este intervalul deschis $(0; 3)$

intersecția celor două intervale este intervalul deschis $(0; 3)$



EXERCITIO

- a) $0 \in (0, 3)$ b) $0.1 \in (-0.1, 0.2)$ c) $\frac{1}{7} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ d) $8 \in (-1, 0)$ e) $8 \in \{ \}$
 f) $128 \in \begin{pmatrix} 31 & 50 \\ 49 & 79 \end{pmatrix}$ g) $93 \in \begin{pmatrix} 59 & 33 \\ 52 & 41 \end{pmatrix}$
 2) Fluctuat.
 a) $(0, 3) \cup (6.5, 7.5)$ b) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(0, 3) \cup (-1, 4) \cup (12, 3) \cup (11, 5)$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 65 \\ 46 & 19 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \right\}$

3) Precizați elementele multimediei enumerându-le

1

↑

[illegible][illegible]

()

2	1	1	1
---	---	---	---

1. *Journal of Management Studies*, 1996, 33, 1, 1-15.

1. *Journal of the American Medical Association*, 1997; 277: 1039-1043.



243 11 5 1 1 1

(1987, 1991) = 1987, 1991

1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 26

1. *Journal of the American Medical Association*, 1997; 277: 1001-1005.

[illegible]

1. ≤ 1

1) $(\sigma \tau \sigma^2) \in \text{int}(\mathcal{C}) \quad [0, 1], 40$

2) Stabilität und Area de ad

$$a) 11 \in [0, 24], \quad b) 2 \in [0,$$

3) Stabilit valoarea de adevar a propoziției:

a) $(2, 3) \subset (2, 3]$, b) $[-3, 3] \subset [2, 3]$, c) $(a, b) \subset [a, b]$, d) $(a, b) \subset [a, b]$, e) $(a, b) \subset (a, b]$

f) $(a, b) \subset [a, b]$

4) Efectuați reuniunile:

a) $(3, 6) \cup (-4, 6)$ b) $\left(-\frac{1}{2}, 1 \right) \cup \left[-\frac{1}{2}, 1 \right)$

e) $(1,3; 4,1) \cup (1,4; 4,2)$; f) $\left(\frac{5}{8}; 1; \frac{3}{7} \right) \cup \left[\frac{7}{11}; \frac{11}{7} \right)$

5) Efectuați:

a) $(-3; 3) \cap (0; 8]$ b) $\left(-\frac{1}{9}; \frac{1}{3} \right) \cap \left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{3} \right)$

$\left[\frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right) \cap \left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5} \right) = \left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5} \right)$ c) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right) \cap \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$

d) Care interval I îndeplinește condițiile

$$I \cap (3, 7) = [5, 7] \text{ și } I \cup (3, 7) = (3, 9) ?$$

Intervalele de forma $[a, b]$ sau (a, b) se numesc **intervale mărginite** deoarece au extremități finite a și b , ele se numesc **intervale nemărginite**. Anume, vom nota cu $[a; +\infty)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$ și cu $(-\infty; a)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$. Acestea sînt intervale cu extremități infinite, ele se numesc **intervale nemărginite la dreapta**.

Dacă extremității a și b nu sînt numere finite, atunci intervalul se numește **interval nemărginit** (a se vedea figura 7). Dacă intervalul este nemărginit la dreapta, atunci el este format din punctele situate „la dreapta” lui a .

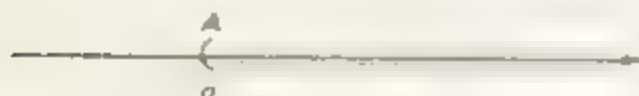


Fig. 17



Fig. 18

Vom nota cu $(-\infty; a]$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$ și cu $(-\infty; a)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$. Acestea sînt intervale nemărginite la stînga.

Intervalul nemărginit $(-\infty; a)$ (a se vedea figura 8) formată din punctele situate „la stînga” lui a se numește **interval nemărginit la stînga**.

Observație Simbolurile $+\infty$ și $-\infty$ nu reprezintă numere reale. Se obișnuiește să se citească simbolul $+\infty$ astfel: „plus infinit”.

Se obișnuiește să se noteze cu $(-\infty; +\infty)$ mulțimea numerelor reale.

EXERCITII

1) Descrieți mulțimile numerelor reale:

a) mulțimea numerelor reale x astfel încît $x < 5$

b) mulțimea numerelor reale x astfel încît $x \leq 5$

Există numere reale x astfel încît să avem $5 < x < 12$? Prin ce sînt ele reprezentate pe axă?

Notăm $A = [-5, 8]$, $B = [2, 7]$, $C = [-1, 0]$, $D = (0, 5]$ și $F = (-3, 8)$.

Efectuați

$$A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C, A \cap D, A \cup D, B \cap C, B \cup C, B \cap D, B \cup D, C \cap D, C \cup D, F \cap A, F \cup A, F \cap B, F \cup B, F \cap C, F \cup C, F \cap D, F \cup D.$$

2. APROXIMĂRI ȘI APROXIMAȚII

Numerele reale ne apar ca rezultat al unor măsurări sau al unor calcule.

Reamintim că a măsura un obiect înseamnă a-l compara cu un alt obiect de același fel ales ca unitate de măsură. Practic nu există posibilitatea unor măsurări exacte, precizia oricărei măsurii depinde de instrumentul de măsură folosit.

1) De exemplu, să presupunem (Fig. 9) să măsurăm cu rigla (gradată în mm) lățimea obținem ca rezultat AB (ce lungimea cuprinsă între 2,1 cm și 2,2 cm) iar segmentul BC are o lungime cuprinsă între 2,1 cm și 2,2 cm.

Putem afirma că patrulaterul $ABCD$ este un pătrat? Cu toate că singura segmente AB și BC au cuprins între 2,1 cm și 2,2 cm, nu putem



Fig. 9

afirma aceasta, sau putea întâmpla ca măsurând singurul cu un instrument de măsură mai precis, să obținem că lungimea segmentului AB este $\approx 2,13$ cm, ca lungimea segmentului BC este $> 2,13$ cm.

Să acceptăm totuși ideea că patrulaterul $ABCD$ ar fi un pătrat. Lungimea (în cm) unei laturi a acestui pătrat este dată de un număr real l . Măsurând cu rigla, rezultă că acest număr este mai mare decât 2,1 dar nu decât 2,2.

$$2,1 < l < 2,2$$

În practică l aproximăm pe l de exemplu cu numărul 2,15. Scriem $l \approx 2,15$ și citim „ l este aproximativ 2,15”. Spunem că „lungimea laturii pătratului este aproximativ de 2,15 cm”.

Nu este obligatoriu să aproximăm pe l prin 2,15. Putem aproxima prin orice alte numere ca de exemplu 2,13, 2,1, 2,2 sau chiar 2.

Aproximând l pe l printr-un număr a facem o eroare*

Să ne ocupăm acum de aria pătratului. Ce putem spune despre această arie (măsurată în cm²). Formula $A = l^2$ ne arată că avem

$$2,1 < l < 2,2$$

adică

$$4,41 < A < 4,84.$$

Putem aproxima de exemplu numărul A prin 4,5, scriem

$$A \approx 4,5.$$

Înțelegând astfel că aria pătratului este aproximativ 4,5 cm². Putem scrie și cu $l = 4$ înțelegând astfel că aria pătratului este aproximativ de 4,5 cm².

* Eroarea este diferența dintre valoarea exactă și valoarea aproximativă.

De exemplu, eroarea este diferența dintre valoarea exactă și valoarea aproximativă.

Să ne ocupăm acum de aria pătratului. Ce putem spune despre această arie (măsurată în cm²). Formula $A = l^2$ ne arată că avem

să ne satisfacă

male

serie zecimală cu o infinitate de cifre :

$$3,141592653589793238$$

ximări ale sale, ca de exemplu :

$$3,14 \text{ , } 3,141 \text{ , } 3,1415 \text{ sau } 3,141593,$$

după necesități

multă decât 0,01, deoarece

$$3,14 - \pi = 0,00159 \approx 0,01$$

Apesar de faptul că
3,1415 este mai precisă decât 3,14

3) Citim pe eticheta unei sticle de oțet

$$\text{Conținut } 1\,000 \pm 20 \text{ ml}$$

Aceasta înseamnă că, dacă sticla conține x ml de oțet, atunci

$$1\,000 - 20 \leq x \leq 1\,000 + 20$$

Pe eticheta unui borcan de mușter citim

$$\text{Conține } 445 \pm 13 \text{ g}$$

imprimat

$$20 \text{ k}\Omega \pm 5\%$$

Dacă rezistorul a fost fabricat de R kilohmi, atunci

mată de 20 kilohmi, cu eroare de cel mult 1 kilohm

Cele de mai sus ne justifică următoarea definiție :

Vom spune că **numărul a aproximează numărul x** cu o eroare de cel mult ϵ , dacă

$$a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$$

Aceasta înseamnă de fapt că $x \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$, sau că $|a - x| \leq \epsilon$

Astfel, 3,14 aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,01, deci 3,14 aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,01, căci

$$|3,14 - \pi| = 0,0044 \dots$$

Numărul e este pozitiv. De obicei, e este ales de forma 10^{-n} unde $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $e = 10^{-1} = 0,1$ se spune că a este o zecimală; dacă $e = 10^{-2} = 0,01$ se spune că a este un număr cu două zecimale etc.

EXERCITII DE SOLUȚII

1) Care dintre numerele 2,14 și 2,15 aproximează pe $\sqrt{5}$ cu eroare de cel mult 0,01?

Luând $a = 2,14$ și $e = 0,01$ se vede că $\sqrt{5}$ este mai mare decât $a + e$ și

$$\text{că } 2,14 + 0,01 = \frac{5}{2} > 2,14 + 0,01 = \sqrt{5}$$

cu eroare de cel mult 0,01. Astfel, numărul 2,15 aproximează pe $\sqrt{5}$ cu eroare de cel mult 0,01.

2) Pentru numărul π , care aproximație este mai bună: 3,14 sau 3,15? 3,14 sau 3,144?

Să comparăm între ele numerele 3,14 și 3,15. Avem $|3,14 - \pi| = \pi - 3,14 = 0,0044 \dots$ și $|3,15 - \pi| = 3,15 - \pi = 0,0084 \dots$ și astfel 3,14 aproximează mai precis pe π decât 3,15.

De asemenea, deoarece $|3,144 - \pi| = 3,144 - \pi = 0,0024 \dots$ este mai mică decât $|3,14 - \pi|$, numărul 3,144 aproximează pe π mai precis decât 3,14.

EXERCITII

1) Se dă zecimalul numărilor $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$. Care dintre ele aproximează pe $\sqrt{5}$ cu eroare de cel mult 0,01?

2) Numărul $\frac{5}{4}$ este aproximat de 1,25 și de 1,255. Care dintre acestea este considerați mai precisă? Dar dintre aproximațiile 0,454 și 0,455? 3) Pentru care valori ale lui n este adevărat că $\frac{1}{n} < 0,005$, d) 0,001?

4) Aflați numărul x știind că

$$a) |a - x| = 0,2 \text{ și } a = 5,3, \text{ b) } x - a = 0,1 \text{ și } a = 10, \text{ c) } a - x = 0,01 \text{ și } a = \frac{7}{4}$$

5) Știm că numerele 3,14 și 3,15 aproximează un număr x cu eroare de cel mult 0,01. Putem scrie un alt număr care aproximează pe x cu eroare de cel mult 0,01?

EXERCITII

1) Verificat dacă $x = 1$ este soluție a ecuației $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{5x-6}{4}$ $x \in \mathbb{R}$
 b) 4 este soluție a ecuației $x^2 - 5x + 6 = (x-6)(x-1)$ $x \in \mathbb{R}$

2) Care dintre numerele $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ este soluție a ecuației

a) $2x - 1 = x + 1$ $x \in \mathbb{R}$ b) $x - 1 = 4x$ $x \in \mathbb{R}$ c) $1 - x = x + x$ $x \in \mathbb{R}$ d) $x + 1 = 1x$ $x \in \mathbb{R}$

3) Ecuația $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ $x \in \mathbb{R}$ are

a) o soluție b) o soluție c) mai multe de două soluții d) două soluții care a și c sunt corecte

Doi ecuații sunt numite echivalente dacă au aceeași mulțime de soluții.
 În rezolvarea ecuațiilor se folosesc următoarele două proprietăți ale egalității (valabile pentru numere reale):

Proprietatea 1 Dacă a, b sunt două numere reale, atunci $a = b$ este echivalent cu $a + c = b + c$ și $a - c = b - c$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$.

Conform acestei proprietăți, putem trece termeni dintr-un membru într-altul, schimbându-le semnul.

Proprietatea 2 Dacă a, b sunt două numere reale, atunci $a = b$ este echivalent cu $ka = kb$ pentru orice $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

De exemplu, să rezolvăm ecuația $3x - 1 = 9 - x$ $x \in \mathbb{R}$

Adunând la ambele membre numărul 1 obținem ecuația $3x = 9 - 1 + x$ $x \in \mathbb{R}$ echivalentă cu prima. Împărțim acum ambele membre cu 2 obținem ecuația $x = \frac{10}{2} - x$ $x \in \mathbb{R}$ care este echivalentă cu prima. Această ultimă ecuație are

evident o singură soluție numărul $\frac{10}{2}$. Deci și ecuația $3x - 1 = 9 - x$ $x \in \mathbb{R}$ are o singură soluție, numărul $\frac{10}{2}$.

O ecuație de forma

$$ax + b = c$$

în care $a \neq 0$ și b, c sunt numere reale este numită ecuație de gradul I cu o necunoscută. Am învățat în clasa a VII-a că orice ecuație de gradul I cu o necunoscută are o singură soluție, numărul $-\frac{b}{a}$.

EXERCITIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuația $ax - 3 = 4x - 2a - x$ $x \in \mathbb{R}$ în care a este un parametru real.

Trecem în membrul stâng toți termenii în care apare necunoscuta iar în membrul drept ceilalți termeni. Ecuația este înlocuită cu ecuația echivalentă

$$4x + ax = -2a - 3, x \in \mathbb{R}$$

sau

$$(a + 4)x = -2a - 3, x \in \mathbb{R}$$

Distingem două cazuri :

1) $a \neq -4$ În acest caz împărțim ambele membre a ecuației cu numărul $a + 4$ ($a + 4$ este $\neq 0$), obținem astfel ecuația echivalentă

$$x = \frac{-2a-3}{a+4}, x \in \mathbb{R}$$

ce are evident o singură soluție: numărul $\frac{-2a-3}{a+4}$.

2) $a = -4$. În acest caz ecuația se scrie :

$$0 \cdot x = -2 \cdot 4 - 3, x \in \mathbb{R};$$

această ecuație nu are nici o soluție

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-un vas s-a turnat acid sulfuric într-un litru 68% cu concentrația de 12% și $1,2$ l cu concentrația de 20% . Cu acid sulfuric la concentrația de 15% mai trebuie turnat pentru a obține o concentrație a amestecului de 16% ? Dar de 18% ?

Rezolvare. Să notăm cu x cantitatea (în litri) de acid sulfuric cu concentrația de 15% ce trebuie turnată în vas pentru a obține amestecul dorit. Notând acidul sulfuric pur cu 1 , ecuația compoziției în masă trebuie să obținem pe de o parte $68 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100}$ pe de altă parte $(0,8 + 1,2 + x) \cdot 16$.

+ $x) \cdot \frac{16}{100}$ litri. Rezolvând ecuația :

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{16}{100}$$

obținem soluția $x = 16$. 16% pentru a obține amestecul cu concentrația de 16% va trebui să mai turnăm în vas 16 l acid sulfuric cu concentrația de 15% .

În același mod, să încercăm să răspundem la a doua întrebare. De data aceasta suntem conduși la ecuația

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{18}{100}$$

care are soluția $x = 0,8$. Aceasta soluție fiind negativă putem spune că nu este posibil să mai obținem în condițiile date amestecul cu concentrația de 18% .

EXERCITII

1) Rezolvați ecuațiile de gradul I

a) $\frac{2}{3}x - 1 = 0$; b) $-25x - 18 = 0$; c) $\frac{3}{5}x + 2 = 0$; d) $-x = 0$

Scrieți soluțiile sub formă zecimală

2) Scrieți ecuațiile de gradul I care au ecuația $\frac{5}{3}x = 2x + R(x)$ ca soluție, unde $R(x)$ este o funcție de soluție.

3) Este adevărată ecuația: $\frac{4}{2}x - \frac{5x}{2} = 4$; $x \in R$ sau $x \in \{1\}$?

4) Rezolvați ecuația: $\frac{x}{16} + 3,11 = 4,01$

5) Rezolvați ecuațiile

a) $8x - 5x = \frac{1}{2}(11x - 5)$; b) $\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{4}(4x - 1) + \frac{1}{8}(8x - 1) + \frac{1}{8} = 2x$

c) $3(x - 5) + 2 = (x - 4)^2 + \frac{x}{2}$; d) $(3 - 4x)^2 + (4 - 3x)^2 = (5x - 5)^2$ e) $(1 - 12x)^2 + (3 - 4x)^2 = (3 - 13x)^2$; f) $(x + 2)(x + 3) = 6$; $(x + 5)(4 + x) = 12$.

g) $\frac{4x + 1}{x - 5x} = \frac{1 - 2x}{x}$; $x \in R \setminus \left\{ \frac{3}{5}, \frac{3}{2} \right\}$ h) $\frac{2x - 5}{x} = \frac{3x}{x} = 0$; $x \in R \setminus \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}$

6) Rezolvați ecuațiile de gradul I care au ca soluție perechea (m, n) pentru $m, n \in R$

a) $a = x - 1$; $a \in R$; b) $\frac{x}{a} = \frac{x}{a}$; $a \in R$; c) $(m + 1)x + a = x$; e) $ax = ax = mx = m$

7) Pentru ce valori ale parametrului a , ecuația

$$(2(a + 1)^2x + 2a(a + 2)) = (5a - 1)x$$

nu are o singură soluție?

Să luăm de exemplu ecuația:

$$2x + y = 4, \quad x, y \in R$$

Ea este o ecuație de gradul I cu două necunoscute. În cazul ecuației

x cu $\frac{1}{2}$, iar necunoscuta y cu 3, obținem

propoziția adevărată: $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$

Putem spune astfel că perechea $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

este soluție a ecuației. Putem constata, prin înlocuire directă, că și perechile $(0; 4)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$, $(3; -2)$ sunt soluții ale ecuației. Orice soluție a ecuației are forma $(t; 4 - 2t)$, unde t este un număr real.

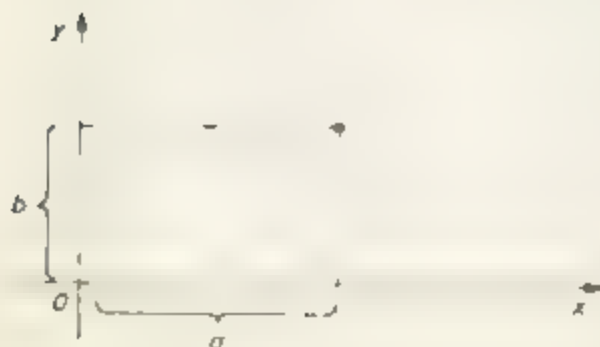


Fig. 1.10

care poate fi identificată cu un punct din planul xOy . Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, ecuația devine $b \cdot y + c = 0$ sau $y = -\frac{c}{b}$. În clasa a VII-a am aratat că această dreaptă poate fi identificată cu o dreaptă din planul xOy (vezi figura 11).

O ecuație de gradul I cu două necunoscute x și y are forma

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

unde a și b nu sunt amândouă egale cu zero. Dacă a și b sunt perechi de numere reale

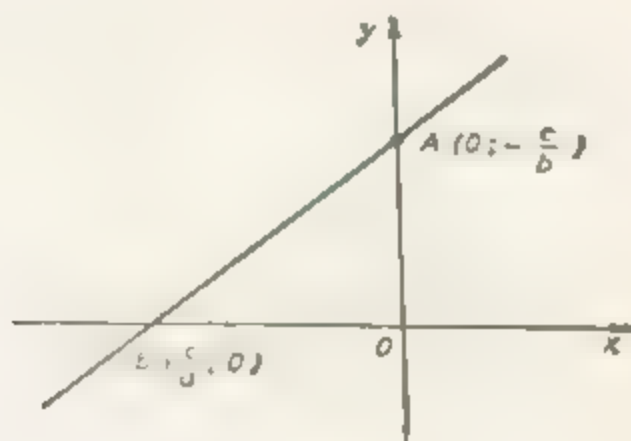


Fig. 1.12

atunci ecuația $ax + by + c = 0$ reprezintă o dreaptă din planul xOy . Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, această dreaptă este determinată de punctele

$$A\left(0, -\frac{c}{b}\right) \text{ și } B\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \text{ (fig. 12).}$$

Ca exemplu, ia $a = 0$, $b = 1$ și $c = -6$.

EXERCITII

1) Reprezintă în același sistem de coordonate dreptele soluțiilor ecuațiilor

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

2) Reprezintă în același sistem de coordonate dreptele

$$a) x - 2y + 1 = 0, b) x + y + 1 = 0, c) 4x - 4y = 12, d) 2x + y = 0$$

Reprezintă în același sistem de coordonate dreptele de ecuații $4x + 2y - 5 = 0$ și $6x + 3y - 9 = 0$. Păstrează vedea că ele sînt paralele.

sisteme de două ecuații cu două necunoscute. De exemplu,

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x = 3, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

sînt sisteme de două ecuații cu două necunoscute.

Să luăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x = 3, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

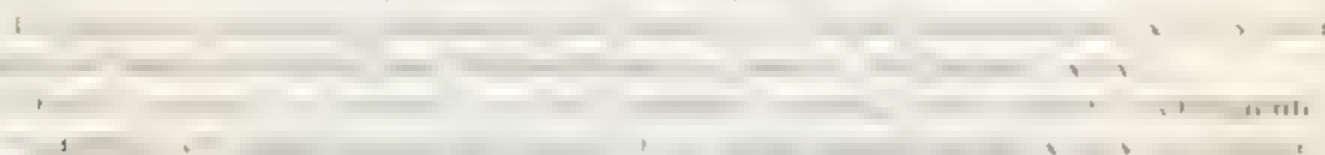
2, iar necunoscuta y cu 1, amîndouă propozițiile

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

și

$$3 \cdot 1 = 3$$

punctul S ce are abscisa 2 și ordonata 1 (vezi figura 13)



$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

sisteme

De exemplu, să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$

prin metoda reducerii

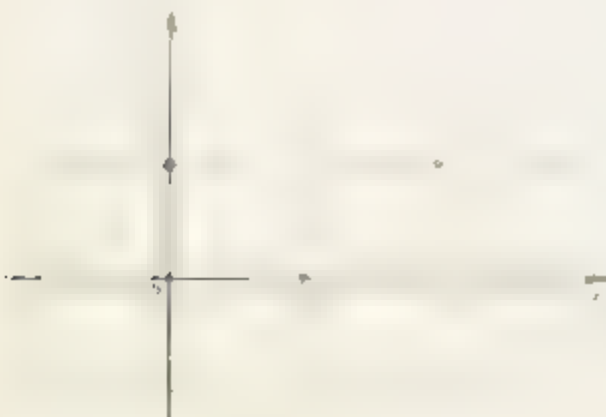


Fig. 14

Înmulțim amba membri ai primei ecuații cu 4, iar amba membri ai celei de a doua cu 3; obținem sistemul

$$\begin{cases} 12x - 8y = 20 \\ 12x + 21y = 6 \end{cases}$$

Scădem din primul membru cu membru cele

de unde $y = -2$

Din prima ecuație obținem $3x = 5 + 2y$ adică $3x = 5 + 2 \cdot 2$ deci $x = 3$.
Soluția sistemului este deci perechea $(3; 2)$.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ prin metoda substituției. Din prima ecuație obținem $x = 3 + 4y$, înlocuim în a doua

$$3(3 + 4y) + 2y = 5$$

Aici este o ecuație doar în necunoscuta y , pe care o rezolvăm

$$9 + 12y + 2y = 5,$$

$$14y = -4,$$

$$y = -\frac{2}{7}$$

Atunci $x = 3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{21}{7} - \frac{8}{7} = \frac{13}{7}$. Soluția sistemului este deci perechea $\left(\frac{13}{7}; -\frac{2}{7}\right)$.

EXERCITII

1) Rezolvați prin metoda reducerii sistemele

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x - 11y = 3 \end{cases}$$

2) Rezolvați prin metoda substituției sistemele

$$a) \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 6y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 5x - 3y = 12 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 5x + 5y - 1 = 0 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

3) Rezolvați sistemul $\begin{cases} 3x - 5y = x \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ cu ajutorul metodei de reducere.

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = x \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 1x - 6y = 5 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - y \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 18 \\ x - 1 = 2y \\ x - 4 = 3y \end{cases}$$

Să considerăm sistemul de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Știm că mulțimea soluțiilor primei ecuații se identifică cu o dreaptă (d) din planul xOy , soluțiile celei de-a doua ecuații se identifică cu punctele dreptei

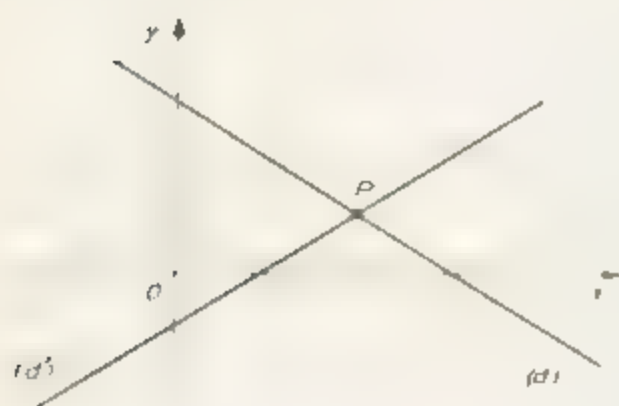


Fig. 1.14

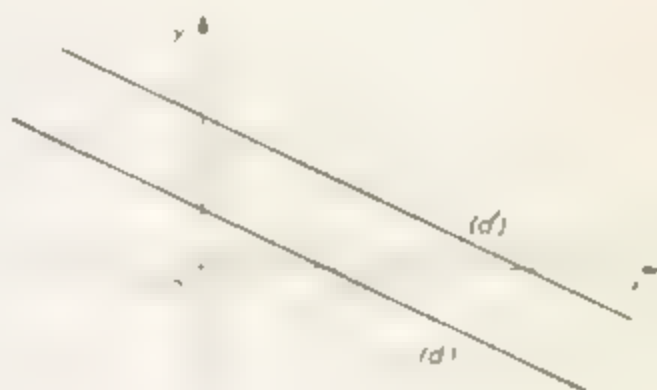


Fig. 1.15

(d') (vezi figura 14). Soluția sistemului se identifică cu punctul P de intersecție a celor două drepte. În acest caz sistemul este **compatibil determinat**.

Dar se poate întâmpla ca cele două drepte (d) și (d') să fie paralele, ca în figura 15. În acest caz sistemul de ecuații nu are nici o soluție și spunem că sistemul este, în acest caz, **incompatibil**.

De exemplu, să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Dacă reprezentăm într-un sistem de coordonate xOy dreptele soluțiilor celor două ecuații ce formează sistemul (vezi figura 16) constatăm că ele sunt paralele. Dacă sistemul ar avea ca soluție perechea (x, y) atunci am avea $x + y = 1$ și $x + y = 2$, ceea ce este absurd. Sistemul este deci **incompatibil**.

Se mai poate întâmpla ca dreapta (d') să fie o parte din dreapta (d) . În acest caz sistemul de ecuații are mai multe soluții: fiecare punct al dreptei (d) corespunde o soluție a sistemului. Se spune că sistemul este în acest caz **compatibil, însă nedeterminat**.

Să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Amplificăm prima ecuație cu 2 și adăugăm la cea de-a doua: ecuația rezultantă reprezintă o dreaptă care este soluția a sistemului. Mai mult, mai precis, soluțiile sale sînt perechile de forma $(x; 2x - 1)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Putem spune că sistemul este compatibil nedeterminat.

Observație: Dacă am înlocui ecuația de-a doua din prima prin înmulțire cu 2

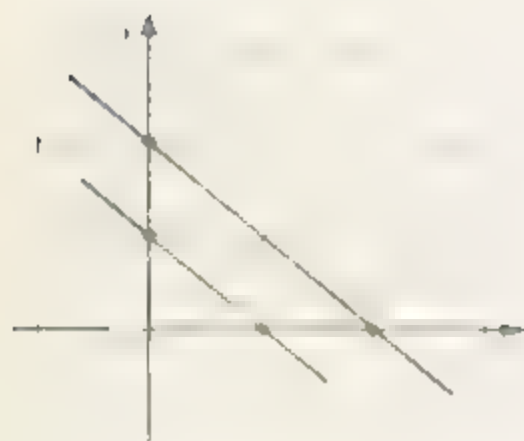


Fig. 1.16

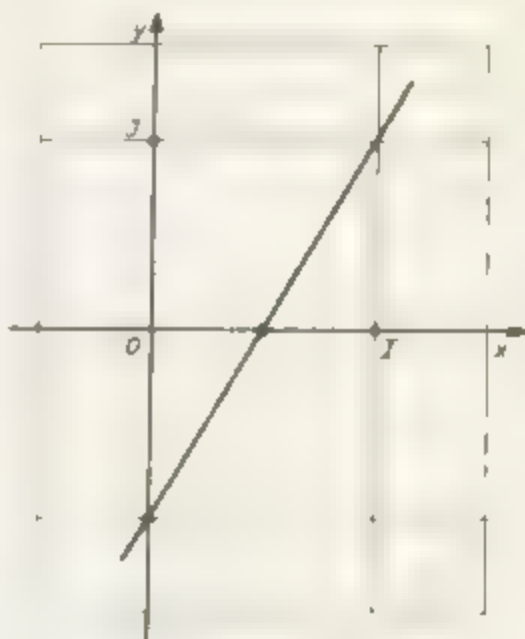


Fig. 1.17

EXERCITII

1) Rezolvați sistemele de ecuații

$$\begin{cases} 90x + 100y = 3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 0,1x + 1,7y = 40 \\ 1,1x - 0,1y = 10,4 \end{cases} \quad [c] \quad \begin{cases} 10x + 7y = 14,7 \\ 11x - 10y = 5,1 \end{cases}$$

2) Rezolvați sistemele de ecuații

$$\begin{cases} 4x + 81 = 0 \\ 4x - 20y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

3) Rezolvați sistemele de ecuații

$$a) \begin{cases} (x + 1)y + 2z = (x - 1)y + 1 + 18 \\ \dots \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 1 = y + 2 \\ y + 1 = z + 3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 = y + 2 \\ y + 1 = z + 3 \\ \dots \end{cases}$$

Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = 1 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Avem $x, y, z \in \mathbb{R}$ și ecuațiile sunt de gradul I

Avem trei ecuații și trei necunoscute, deci există soluție. Dacă $x = 2, y = 3, z = 1$ atunci

sistemul are soluția $(2, 3, 1)$. Aceasta este soluția a sistemului

Fie $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului. Atunci $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ este soluția unică a sistemului

Matricea A este inversabilă, deci sistemul are soluție unică $(2, 3, 1)$ este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} (x - 2) + (y - 3) + (z - 1) = 0 \\ -3(y - 3) + 8(z - 1) = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem $(x - 2) + (y - 3) + (z - 1) = 0$ și $-3(y - 3) + 8(z - 1) = 0$. Acum $x = 2, y = 3, z = 1$ este singura soluție a sistemului de trei ecuații cu trei necunoscute

Avem $x, y, z \in \mathbb{R}$ și ecuațiile sunt de gradul I. Avem trei ecuații și trei necunoscute, deci există soluție. Dacă $x = 2, y = 3, z = 1$ atunci sistemul are soluția $(2, 3, 1)$. Aceasta este soluția unică a sistemului

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 13, \\ 3x + 2y - 2z = 13, \\ 5x - 4y - 2z = 11 \end{cases}$$

Avem $x, y, z \in \mathbb{R}$ și ecuațiile sunt de gradul I. Avem trei ecuații și trei necunoscute, deci există soluție. Dacă $x = 2, y = 3, z = 1$ atunci sistemul are soluția $(2, 3, 1)$. Aceasta este soluția unică a sistemului

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2(2x + 3y - 13) = 13, \\ 5x - 4y - 2(2x + 3y - 13) = 11 \end{cases}$$

Efectuând calculele, acest sistem de ecuații se transformă în

$$\begin{cases} x - 4y = -13 \\ x - 10y = -15 \end{cases}$$

rezolvându-l, obținem $x = 5$ și $y = 2$. Apoi $z = 2 + 5 - 3 + 2 = 13 - 3 = 10$.
Deci soluția sistemului este tripletul $(5; 2; 10)$.

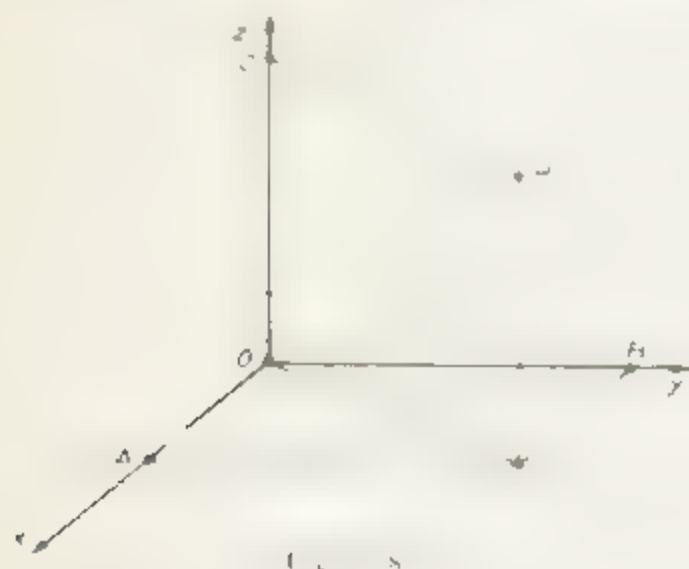
Alt exemplu : sistemul
$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Vom scrie, de exemplu, din cele două ecuații $x = y + 1$ și vom înlocui în prima (în a treia nu este nevoie). Obținem sistemul în x și z :

$$\begin{cases} 2x + (x - 1) + z = 9 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Rezolvându-l, obținem $x = 3$, $z = 1$;
sistemul are ca soluție tripletul $(3; 2; 1)$.

Tripletele $(x; y; z)$ pot fi identificate cu puncte ale spațiului, înzestrat cu un sistem de coordonate $Oxyz$ (vezi figura 18). Mai precis, tripletul $(x; y; z)$ se identifică cu punctul P ce are abscisa x , ordonata y și cota z (În figura 19 abscisa lui P este lungimea segmentului OA , ordonata lui P este lungimea segmentului OB , iar cota lui P este lungimea segmentului OC .)



EXERCITII

1) Rezolvați sistemele de ecu.

a)
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ y + x = 2x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 2x - 3y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + 4z = 47 \\ x - 5z = 4 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 18 \\ x + 2y + 2z = 30 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

2*) Rezolvați sistemele de ecuații

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 42 \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}z \end{cases}$$

b)
$$\frac{x}{4} + 1 = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3}$$

Multe probleme ridicate de practică pot fi rezolvate cu ajutorul unui model matematic. De obicei, un model matematic asociat unei probleme este format din ecuații și inecuații, ce reflectă problema concretă.

Problema 1. Pentru construcția a două blocuri de locanțe de același tip au fost pregătite 212 panouri prefabricate. Un tractor cu remorcă transportă, la fiecare drum, cîte trei panouri la blocul mai apropiat. Pentru transportul spre blocul mai departat a fost alocat un alt tractor, ce poate transporta în remorcă, la fiecare drum, 4 panouri.

După o săptămână al doilea tractor a făcut cu 14 drumuri mai puțin decît primul și au mai rămas să fie transportate 30 panouri.

Aflați cîte panouri mai trebuie transportate spre blocul mai apropiat și cîte drumuri mai are de făcut primul tractor.

Rezolvare. Să notăm cu x numărul de drumuri efectuate de primul tractor (cel care transporta panouri spre blocul mai apropiat), iar cu y numărul de drumuri efectuate de cel de al doilea, în acea săptămână. Din textul problemei rezultă că $y = x - 14$.

În total primul tractor a transportat $3x$ panouri, iar al doilea $4y$ panouri. Rămînînd de transportat încă 30 panouri, avem $3x + 4y + 30 = 212$. Astfel x și y formează soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} y = x - 14 \\ 3x + 4y + 30 = 212 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuații împreună cu condițiile $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{N}$, formează modelul matematic al problemei. Rezolvînd sistemul obținem $x = 34$ și $y = 20$.

Deci primul tractor a transportat $3 \cdot 34 = 102$ panouri. Pînă la epuizarea celor 106 panouri ce trebuie transportate spre blocul mai apropiat, ar mai trebui transportate 4 panouri, deci 201 transporturi cu primul tractor. Pentru blocul mai depărtat mai sînt de transportat 26 de panouri, adică 701 transporturi cu al doilea tractor. Puteți găsi o organizare mai bună a transporturilor?

Problema 2. În port, două conducte se descarcau ștei dintr-un petrolier de 21 000 t trebuiau să-l descarce în 12 ore. După 5 ore la conducta principală apare o defecțiune, ea este imediat înlocuită cu conducta de rezervă, care are însă un debit de două ori mai mic. În consecință descărcarea durează 15 ore.

Puteți afla debitele celor trei conducte?

Rezolvare. Fie x debitul (în tone pe oră) al primei conducte, y debitul celei de-a doua, iar z debitul conductei de rezervă. Dacă descărcarea ar fi decurs normal atunci în 12 ore conductele 1 și 2 ar fi descărcat $12(x + y)$ tone ștei. În cele 5 ore de funcționare normală ele descarcă $5(x + y)$ tone, apoi, în cele $15 - 5 = 10$ ore rămase, conducta 1 și de rezervă descarcă $10(x + z)$ tone

În plus, știm că $z = \frac{x}{2}$.

Așadar x , y și z formează soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} 12(x + y) = 21\,000 \\ 5(x + y) + 10(y + z) = 21\,000 \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Acesta este modelul matematic al problemei. Rezolvându-l, obținem $x = 1\,150$, $y = 600$, $z = 575$.

Problema 3. Din A până în C, trecând prin B, sînt 104 km. Din A până în B, trecînd prin C, sînt 128 km, iar din B pînă în C, trecînd prin A, sînt 96 km. Aflați distanțele între A și B, B și C, A și C.

Rezolvare Să notăm cu x distanța între A și B, cu y distanța între B și C și cu z distanța între A și C, măsurate în km. Astfel, distanța între A și C, trecînd prin B, este de $(x + y)$ km și aceasta este egală cu 104 km. Deoarece $x + y = 104$, formeză soluția sistemului de ecuații :

$$\begin{cases} x + y = 104, \\ x + z = 128, \\ x + y + z = 96 \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem $x = 36$, $y = 68$, $z = 60$.

Problema 4. Tatăl lui Ionică are pe cont la bancă suma de 4 000 lei pe două cîrnete, unul cu dobîndă de 3,5% și celălalt cu dobîndă de 5%. După un an a primit pentru suma depusă dobanzi în valoare de 185 lei. Cît a depus pe carnetul cu dobînda de 5%?

Rezolvare Notăm cu x suma depusă pe carnetul cu dobînda de 3,5% și cu y suma depusă pe carnetul cu dobînda de 5%. Textul problemei se transpune în condițiile

$$x + y = 4\,000$$

$$\frac{3,5}{100}x + \frac{5}{100}y = 185$$

Obținem $y = 3\,000$. Deci a depus 3 000 lei pe carnetul cu dobînda de 5%.

Problema 5. Studiîndu-se în laborator dependența rezistenței unui termistor de temperatură, au fost obținute următoarele date:

temperatura T (în $^{\circ}\text{C}$)	20	40	80
rezistența R (în $\text{k}\Omega$)		6,3	9,1

Se bănuiește că legătura între temperatură T și rezistența R este descrisă de o lege de forma :

$$R = \frac{a}{bT} + c$$

Determinați valorile lui a , b și c , cînd se știe că rezistența termistorului la temperatura de 60°C ? (Se presupune că formula găsită este corectă.)



Fig. 1 19

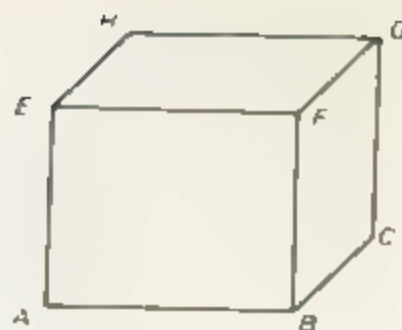


Fig. 1 20

învăţat în clasa a VI-a. Obţinem :

$$\sqrt[3]{32} \approx 3,1748021 \dots$$

În figura 20 am desenat un cub care are volumul de 10 cm³. Dacă măsurăm mărimea AB cu rigla, am constata că lungimea l a sa este cuprinsă între 2,1 şi 2,2 (cm).

Pe de altă parte, ştim că volumul cubului este l³ cm³. Deci

$$l^3 = 10$$

Asadar l este un număr real cuprins între 2,1 şi 2,2 al cărui cub este 10. Acest număr se notează $\sqrt[3]{10}$ şi se numeşte *rădăcina cubica* a lui 10 (sau *radicalul de indice 3 din 10*).

Aşa numărul $\sqrt[3]{32}$, ca şi numărul $\sqrt[3]{10}$, scris zecimal, are o infinitate de cifre în dreapta virgulei, cifre care nu se repetă în mod periodic. De aceea, în practică suntem nevoiţi să lucrăm cu aproximaţii ale lor, de forma 3,175 respectiv 2,15.

Definiţie. Dacă a este un număr real pozitiv, atunci rădăcina pătrată a lui a este numărul real pozitiv x astfel încât x² = a. Dacă a este un număr real negativ, atunci rădăcina pătrată a lui a este numărul real x astfel încât x² = -a.

Notăm rădăcina pătrată a lui a cu \sqrt{a} . Deoarece nu există nici un număr real x astfel încât x² = -1, de aceea scriem că $\sqrt{-1}$ nu există. Dacă a este un număr real pozitiv, atunci rădăcina pătrată a lui a este \sqrt{a} .

Exemple. Deoarece $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, avem $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$; deoarece $0,12^2 = 0,0144$,

avem $\sqrt{0,0144} = 0,12$.

Deoarece $2^3 = 8$, avem $\sqrt[3]{8} = 2$; deoarece $(-2)^3 = -8$, avem $\sqrt[3]{-8} = -2$.

De asemenea, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$.

Am învăţat în clasa a VII-a să lucrăm cu rădăcini pătrate. Vom reaminti principalele proprietăţi :

1) $(\sqrt{a})^2 = a$ pentru $a \geq 0$;

2) $\sqrt{a^2} = |a|$ pentru orice număr a ;

$$3) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ pentru } a \geq 0 \text{ și } b \geq 0;$$

$$4) \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ pentru } a \geq 0 \text{ și } b > 0,$$

care se mai scrie și astfel :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

EXERCITII

1) Calculați :

$$a) \sqrt{6} \cdot \sqrt{24}, b) \sqrt{12} \cdot \sqrt{27}, c) \sqrt{450} \cdot \sqrt{50}, d) \sqrt{48} \cdot \sqrt{108}$$

2) Este adevărat că $(\sqrt{a})^2 = a^2$ și $(\sqrt{b})^2 = b^2$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$? Demonstrați sau dați un contraexemplu.

3) Scoateți factori de sub radical :

$$a) \sqrt{750}, b) \sqrt{60}, c) \sqrt{1080}, d) \sqrt{10}, e) \sqrt{2}, f) \sqrt{24}, g) \sqrt{50a}, h) \sqrt{50a}$$

4) Introduceți sub radical :

$$a) 3\sqrt{0,5}, b) 0,5\sqrt{3}, c) \sqrt{0,5}, d) \sqrt{0,5}, e) \sqrt{0,5}, f) \sqrt{0,5}$$

5) Scoateți factori de sub radical, apoi efectuați adunările

$$a) \sqrt{100} + \sqrt{288} + \sqrt{18}, b) \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}, c) \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50}, d) \sqrt{18} + \sqrt{50} + \sqrt{72}$$

$$d) \sqrt{176} - \sqrt{275} + \sqrt{396}$$

e) Efectuați împărțirile

$$a) \sqrt{45} : \sqrt{5}, b) \sqrt{18} : \sqrt{2}, c) \sqrt{12} : \sqrt{3}, d) \sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Extragerea rădăcinii pătate dintr-un număr $a \geq 0$ este anevoioasă. De aceea se obișnuiește să se utilizeze tabele. La sfârșitul manualului este prezentat tabelul ce conține rădăcinile pătate ale numerelor naturale mai mici decât 100.

Cum calculăm $\sqrt{0,2}$ folosind tabelul ? Se scrie $0,2 = \frac{20}{100}$

$$\text{deci } \sqrt{0,2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{100}} = \frac{4,4721}{10} = 0,4472$$

$$\text{La fel, } \sqrt{0,84} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{100}} = \frac{9,1651}{10} = 0,9165$$

Extragerea rădăcinii cubice dintr-un număr este și mai anevoioasă decât extragerea rădăcinii pătate. La sfârșitul manualului prezentăm tabelul ce conține rădăcinile cubice ale numerelor naturale mai mici decât 100.

Întâlnim uneori în calcule numere de forma $\frac{1}{5}(\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}$ • Cum operăm cu aceste numere ?

De exemplu :

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} \quad \text{adică se însumează } 7 \cdot \sqrt{3} \text{ ;}$$

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 1 = 2 - \sqrt{2} \text{ ;}$$

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{6} \text{ ;}$$

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(4\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 20 + \sqrt{15} + 8\sqrt{15} + 6 = 26 + 9\sqrt{15} \text{ ;}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{adică spunem că am raționalizat}$$

numitorul ;

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2 - 1} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

La fel ca mai înainte, am raționalizat numitorul de data aceasta prin amplificare cu $\sqrt{2} + 1$.

Să reamintim felul în care putem scrie mai simplu, scrierea zecimală a unor numere.

De exemplu, fie numărul $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Nu putem obține ușor scrierea zecimală a sa efectuând împărțirea $2 : 2,23606...$ și nici amplificăm fracția cu $\sqrt{5}$, pentru a obține numitorul rațional $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} = 0,4 \cdot 2,23606... = 0,89442...$

Alt exemplu Fie numărul scris $\frac{3}{\sqrt{3} - 1}$. Vom amplifica fracția cu $\sqrt{3} + 1$, în acest fel numitorul devine număr rațional $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$. Deci :

$$\frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) = 4,098$$

Alt exemplu Vom amplifica pe $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ cu $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ pentru a raționaliza numitorul :

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 1,008...$$

EXERCITIUL REZOLVAT

Arătați că $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 2$

Într-adevăr,

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

EXERCITII

1) Efectuați înmulțirile

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{50}$ b) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ f) $(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})$ g) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{11}$

2) Raționalizați numitorul

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; c) $\frac{3(\sqrt{8} - 4)\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}}$; f) $\frac{1}{2 + \sqrt{1}}$

g) $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3} + 1}$; h) $\frac{4}{7 - \sqrt{2}}$; i) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$; j) $\frac{7}{\sqrt{20} - 4}$; k) $\frac{8}{\sqrt{17} + 3}$; l) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

3) Efectuați împărțirile

a) $\sqrt{75} : \sqrt{12}$; b) $2\sqrt{8} : 3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{54} : \sqrt{6}$; d) $\sqrt{27a} : \sqrt{a}$

4) Aproximați (cu eroare de cel mult 0,01) numerele

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{12}{\sqrt{10}}$; c) $\frac{4}{\sqrt{2} - 1}$; d) $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$; e) $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Rădăcina cubică a numărului a este acel număr u ce are proprietatea că

$u^3 = a$. Acest număr se notează $\sqrt[3]{a}$. Astfel :

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Numărul u ce are proprietatea că $u^3 = a$ se numește rădăcina cubică a lui a .

ar mai exista un număr v , diferit de u , astfel încât $v^3 = a$

Atunci $u^3 - v^3 = 0$, ceea ce putem scrie și $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = 0$ (verificați !).

... a (care este diferit de zero) obținem $u^2 + uv + v^2 = 0$ sau

$$\left(\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avem o sumă de numere pozitive egală cu 0. Deci $u + \frac{1}{2}v = 0$ și $v = 0$. Așadar obținem $u = v = 0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută $u \neq v$.

Prin urmare, $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a+b}$ numai în cazul în care am făcut-o, este falsă.

Teoremă. Dacă a, b sînt două numere reale atunci:

- 1) $\sqrt[3]{a^3} = a$
- 2) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$
- 3) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b} \quad (b \neq 0)$

Demonstrăm. Proprietatea 1) rezultă direct din definiția rădăcinii cubice. Pentru proprietatea 2) să presupunem că $\sqrt[3]{a} = x$ și $\sqrt[3]{b} = y$, deci $a = x^3$ și $b = y^3$. Să înmulțim membru cu membru aceste două egalități, obținem $a \cdot b = x^3 \cdot y^3$, sau $(x \cdot y)^3 = a \cdot b$.

Acum să înlocuim x cu $\sqrt[3]{a}$ și y cu $\sqrt[3]{b}$, adică $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$.

Proprietatea 3) se mai scrie și astfel :

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Încercați să o stabiliți !

Să observăm că $\sqrt[3]{1^3} = 1$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$, $\sqrt[3]{3^3} = 3$ și în general

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a, \text{ pentru orice număr } a$$

EXERCITII

1) Completați tabelul

$\sqrt[3]{125}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$	$\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$	$\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{125}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{125}}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{125}{27}}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{125}{8}}}$

$\sqrt[3]{x}$

2) Scoateți factori de sub radical

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \quad \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1000}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8000}} = \frac{1}{20} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot \frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 125}}{\sqrt[3]{27 \cdot 8}} = \frac{5}{3} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot \frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$$

3) Introduceți sub radical

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1000}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} \quad \frac{2}{3} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \quad \frac{5}{2} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} \quad \frac{1}{20} = \sqrt[3]{\frac{1}{8000}} \quad \frac{5}{3} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} \quad \frac{5}{4} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$$

4) Efectuați

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \quad \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot \frac{125}{8}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt[3]{54} = 3 \sqrt[3]{128} = 2 \sqrt[3]{16} = 5 \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{2000} = 10 \sqrt[3]{2}$$

5) Efectuați :

a) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt{200})$ b) $(\sqrt[3]{54} - 1)^2$ c) $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array} \right\}$ d) $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[3]{1000}$

Fie numărul $\frac{6}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$, amplificați cu $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ raționalizăm numitorul, obținem

$$\frac{6(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{4}^3 - \sqrt[3]{2}^3} = \frac{6(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{4 - 2} = 3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$$

Să observăm că $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{4}^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}^3 =$

$= 4 + 6\sqrt[3]{8} + 2 = 12$. Așadar, pentru a raționaliza numitorul

fracției $\frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}$, amplificăm cu $\sqrt[3]{2} + 1$ obținem ca rezultat $3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = 3(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$

EXERCITII

1) Raționalizați numitorul

a) $\frac{3}{\sqrt[5]{9}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ c) $\frac{2}{2 - \sqrt[3]{4}}$ d) $\frac{5}{\sqrt[3]{6} - 1}$ e) $\frac{5}{\sqrt[3]{2} + 1}$

2) Ordonati crescător numerele

a) $2\sqrt[3]{7}$, 3, $3\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt[3]{120}$ b) 9, $3\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{4}$ și $3\sqrt[3]{30}$

3) Fie $a = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ și $b = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$. Calculați a^3 și b^3 . Determinați semnul fiecărui număr.

Calculați apoi pătratele a^2 , b^2 . Ce observați?

4) Rezolvați sistemele de ecuații

a) $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}}x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

LUCRARI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Calculați a) $\sqrt[3]{2^3}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt[3]{1000000}$ d) $\sqrt[3]{1000000000}$ e) $\sqrt[3]{1000000000000}$ f) $\sqrt[3]{1000000000000000}$ g) $\sqrt[3]{1000000000000000000}$ h) $\sqrt[3]{10000000000000000000}$ i) $\sqrt[3]{100000000000000000000}$ j) $\sqrt[3]{1000000000000000000000}$ k) $\sqrt[3]{10000000000000000000000}$ l) $\sqrt[3]{100000000000000000000000}$ m) $\sqrt[3]{1000000000000000000000000}$ n) $\sqrt[3]{10000000000000000000000000}$ o) $\sqrt[3]{100000000000000000000000000}$ p) $\sqrt[3]{1000000000000000000000000000}$ q) $\sqrt[3]{10000000000000000000000000000}$ r) $\sqrt[3]{100000000000000000000000000000}$ s) $\sqrt[3]{1000000000000000000000000000000}$ t) $\sqrt[3]{10000000000000000000000000000000}$ u) $\sqrt[3]{100000000000000000000000000000000}$ v) $\sqrt[3]{1000000000000000000000000000000000}$ w) $\sqrt[3]{10000000000000000000000000000000000}$ x) $\sqrt[3]{100000000000000000000000000000000000}$ y) $\sqrt[3]{1000000000000000000000000000000000000}$ z) $\sqrt[3]{10000000000000000000000000000000000000}$

d) $4^{\frac{1}{2}}$ e) $4^{\frac{1}{3}}$ f) $4^{\frac{1}{4}}$ g) $4^{\frac{1}{5}}$ h) $4^{\frac{1}{6}}$ i) $4^{\frac{1}{7}}$ j) $4^{\frac{1}{8}}$ k) $4^{\frac{1}{9}}$ l) $4^{\frac{1}{10}}$ m) $4^{\frac{1}{11}}$ n) $4^{\frac{1}{12}}$ o) $4^{\frac{1}{13}}$ p) $4^{\frac{1}{14}}$ q) $4^{\frac{1}{15}}$ r) $4^{\frac{1}{16}}$ s) $4^{\frac{1}{17}}$ t) $4^{\frac{1}{18}}$ u) $4^{\frac{1}{19}}$ v) $4^{\frac{1}{20}}$ w) $4^{\frac{1}{21}}$ x) $4^{\frac{1}{22}}$ y) $4^{\frac{1}{23}}$ z) $4^{\frac{1}{24}}$

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$; b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 0,0625$; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

3) Calculați:

a) $2^3 + 0^3 + 1^3 + (-1)^3 + 0^3 + 0^3 + 10^3 + (-10)^3 + (-5)^3 + 0^3$; b) Scrieți rezultatele în formă standard

4) Calculați: a) $|8 + (-2 + 132)|$; b) $|25 + |250 + |25000|$; c) $|^3 9 + |^3 15 + |^3 25$

5) Raționalizați numitorii: a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; e) $\frac{3}{\sqrt{2} + 1}$

LUCRAREA A II-A

1) Care dintre numerele -8 , 7 , 8 și 9 este soluție a ecuației $\frac{x + 63}{16x} = 1$?

2) Rezolvați ecuațiile: a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 3$; b) $5(x - 1) = 4(3 - x) + 7$

3) Rezolvați sistemele de ecuații

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{8} - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

4) Un tricou costă 14 lei, este 95% din prețul costumului. Cămașa costă 36 lei mai scump decât cravata și are o preț de 2 ori mai scump decât cămașa. Aflați prețul costumului, al cămășii și al cravatei.

CAPITOLUL II

FUNCȚII

1. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

Să notăm cu litera A intervalul închis $[0, 1]$ iar cu litera B intervalul închis $[0, 2]$. Putem stabili o legătură între aceste intervale, anume, fiecărui element x din A îi putem face să îi corespundă dublul sau $2x$, care este un element din mulțimea B . Am definit astfel o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B . O notăm astfel $f: A \rightarrow B$; aceasta funcție este descrisă (dată) de formula $f(x) = 2x$.

În general, să ne imaginăm că am făcut să corespundă fiecărui element x dintr-o mulțime A un (singuri) element y dintr-o mulțime B ; spunem că am definit o funcție de la A la B .

Termenul de definiție: f este funcție de la A la B dacă și numai dacă:

1. f este o funcție de la A la B dacă și numai dacă:

În exemplul de mai sus am folosit litera x pentru a nota un element oarecare din domeniul de definiție — orice literă folosită în acest scop poartă numele de argument.

Exemplu. Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Ce putem spune despre aria sa?

Să notăm cu h (cm) lungimea bazei dreptunghiului. Deoarece semper perimetrul este de 6 cm, înălțimea dreptunghiului va fi de $6 - h$ (cm). Aria a (în cm²) a dreptunghiului este dată deci de:

$$a = h(6 - h).$$

Putem spune că aceasta formulă ne dă aria dreptunghiului în funcție de lungimea bazei sale. Să precizăm această funcție.

Numărul a , reprezentând o arie, nu poate fi negativ — putem considera $a \in [0, +\infty)$. Deoarece h și $6 - h$ reprezintă lungimi, trebuie să avem $6 - h \geq 0$; astfel $h \in [0, 6]$.

Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului este exprimată prin funcția

$$f: [0, 6] \rightarrow [0, +\infty),$$

descrisă de $f(h) = h(6 - h)$.

Verificăm că este litera b . Care este domeniul de definiție al funcției? Dar codomeniul?

Să reprezentăm această funcție prin puncte. Completăm mai întâi un tabel de valori:

b	0	1	2	3	4	5	6
$f(b)$	0	5	8	9	8	5	0

Înscrivăm în tabelul următor perechi de coordonate (vezi figura 1). Scriem în abscisă b și ordonată $f(b)$ trecute în tabel. Le notăm prin $(b, f(b))$. Graficul obținut este o curbă.

Observăm, privind acest grafic, că numărul a poate lua valori doar în intervalul $[0; 9]$. Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului poate fi exprimată și prin funcția:

$$g: [0, 6] \rightarrow [0, 9], g(b) = f(6 - b)$$

Observație. Funcția g diferă de funcția f , dar are alt codomeniu.

Alte exemple. 1) *Procese de creștere și de descreștere*. O celulă de bacterie se divide, dând naștere la două celule; după o oră, fiecare dintre acestea se divide, apărând astfel patru celule; după încă o oră, fiecare din acestea se divide, apărând opt celule și așa mai departe. Putem completa un tabel:

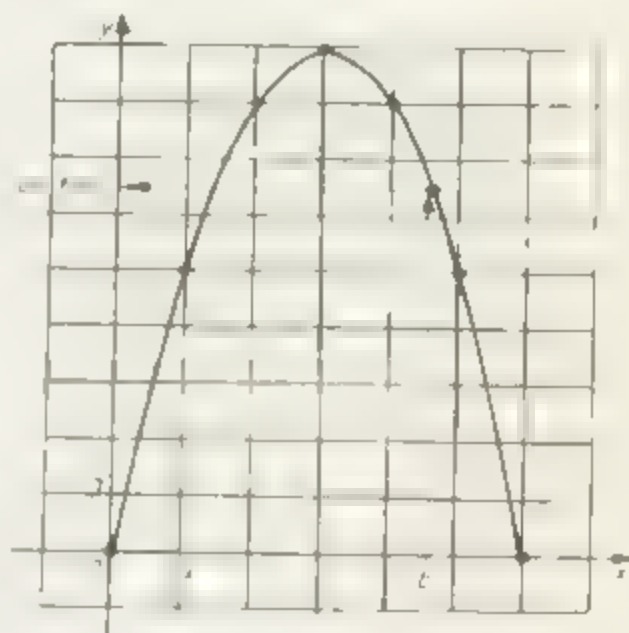


Fig. II.1

Momentul t	0	1	2	3	4	...
Numărul total de bacterii	1	2	4	8	16	...

Să observăm că numărul total de bacterii n depinde de momentul, în care le numărăm. Acest proces de creștere este exprimat prin funcția $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de scriere $n(t) = 2^t$ (vezi tabelul). Graficul acestei funcții este o mulțime de puncte din plan; câteva sînt desenate în figura 2.

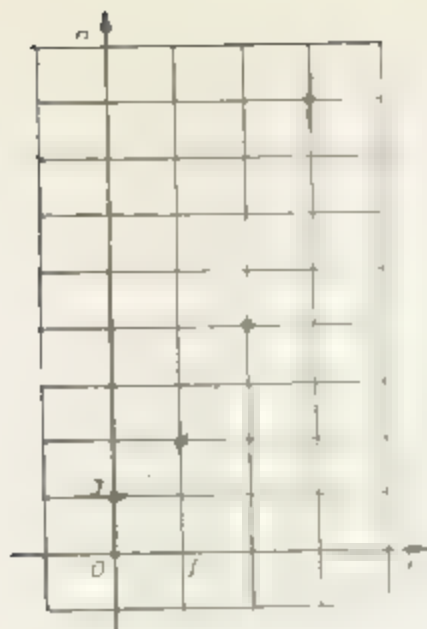


Fig. 11.2

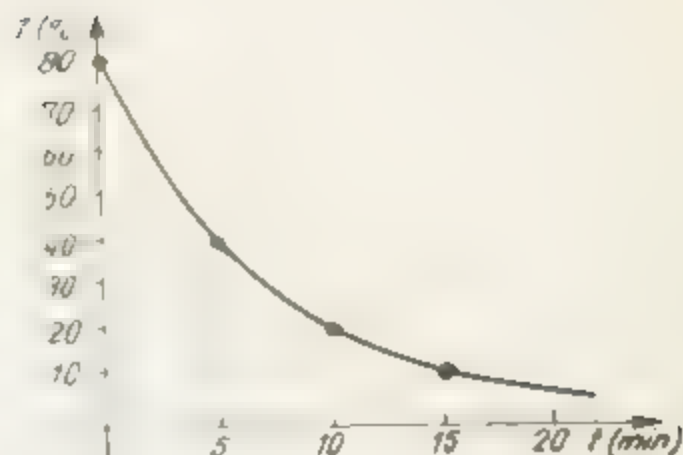


Fig. 11.3

b) Măsurând temperatura T în funcție de momentul t în care s-a măsurat, s-au obținut următoarele rezultate :

Momentul t	0	5	10	15
Temperatura T (în $^{\circ}\text{C}$)	80	40	20	10

Dependența între temperatura T și momentul t în care s-a măsurat această temperatură poate fi exprimată prin funcția

$$T = 80 \cdot 2^{-t/5} \quad \text{R}$$

descrișă de $T(t) = 80 \cdot 2^{-t/5}$ (verificați !)

Graficul acestei funcții se poate construi prin Fig. 11.3 printr-o linie „continuă”, ce trece prin punctele ce corespund datelor din tabel.

2) Elevii unei clase au obținut la un examen următoarele rezultate: două note de 4, patru note de 5, trei note de 6, cinci note de 7, opt note de 8, șase note de 9 și patru note de 10. Construiți funcția

$$f: \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{N}$$

care face să corespundă fiecărei note x numărul care arată de câte ori a fost obținută nota). Funcția este descrisă în tabelul

Nota x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența ei $f(x)$	0	0	0	4	3	5	8	6	4

Graficul acestei funcții este alcătuit din punctele $I(1, 0)$, $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$, $D(5, 4)$, $E(6, 3)$, $F(7, 5)$, $G(8, 8)$, $H(9, 6)$ și $K(10, 4)$ (vezi figura 4)

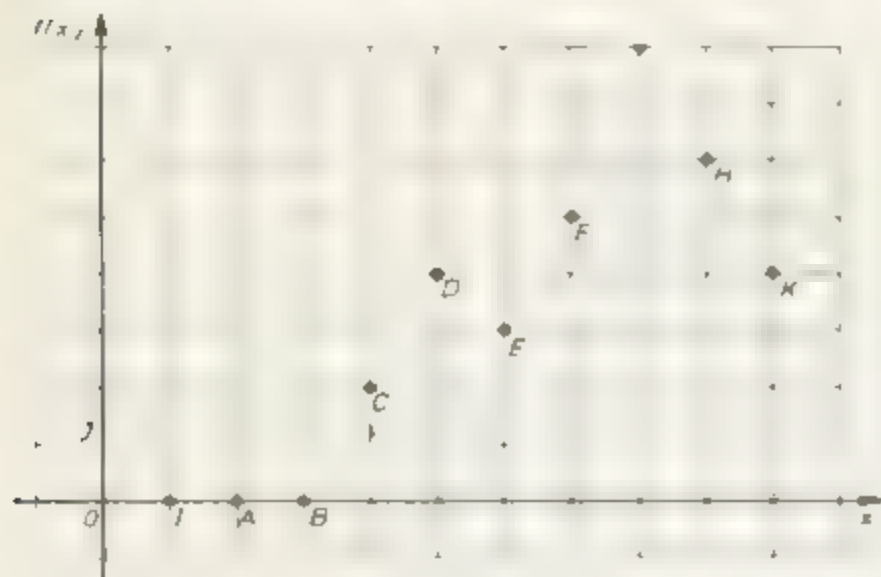
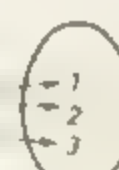
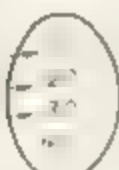


Fig. 11.4

EXERCITII

1) (verzi) Care dintre următoarele funcții sunt surjective?



b

d

2) În tabelul de mai jos, înlocuiți f cu funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 + 1$. Acompletați tabelul de valori al funcției

3) Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă astfel:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \leq 0 \\ x - 2 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Calculați $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(1.5)$, $g(2)$, $g(2.5)$, $g(3)$, $g(4)$.

4) Un preț pe unitatea de măsură este de 12 lei. Dacă se cumpără x unități de măsură, se plătește $f(x)$ lei. Se dă tabelul de mai jos, în care f este funcția de preț care va fi utilizată pentru a calcula valoarea plătită pentru o anumită cantitate de măsură. Se dă tabelul de mai jos, în care f este funcția de preț care va fi utilizată pentru a calcula valoarea plătită pentru o anumită cantitate de măsură. Se dă tabelul de mai jos, în care f este funcția de preț care va fi utilizată pentru a calcula valoarea plătită pentru o anumită cantitate de măsură.

x	8	8.5	9	10	10.5	11	12
$f(x)$	0						

Atunci putea completa tabelul de mai sus? Atunci putea descrie funcția f care descrie funcția?

5) În paranteză se arată distanța d (km) dintre stațiile A și B pe traseul București - Iași - Galați - Constanța - Eforie Nord - Mama Giulei - Tulcea - Brăila - Giurgiu - București. Tabela de mai jos ne dă distanța parcursă de la stația A la stația B.

t	1	2	3	4
distanța d	4,9	19,6	44,1	78,4

Punct de care depinde distanța d este t , d este funcție de t , $d = f(t)$, $f: D_f \rightarrow R$, $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$, $f(t) = d$ (unde d este distanța în km și t este timpul în ore).

6) Reprezentați grafic funcțiile

a) $f: [-2, -1, 0, 1, 2] \rightarrow R, f(x) = x^2 - x$

b) $g: [-2, -1, 1, 2] \rightarrow R, g(x) = x^2 - 1$

7) Care dintre graficele funcțiilor

a) $f: R \rightarrow R, f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 4x$ b) $g: R \rightarrow R, g(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ c) $h: R \rightarrow R, h(x) = x + 1$,

conține originea axelor?

8) Pentru ce valoare a lui m graficul funcției

$$f: R \rightarrow R, f(x) = mx + 5$$

conține punctul $A(1, -5)$?

2. FUNCȚII LINIARE

O funcție $f: R \rightarrow R$ definită prin $f(x) = mx + n$ unde m și n sînt numere reale date, se numește **funcție liniară**. Graficul oricărei funcții liniare este o dreaptă în plan. Cunoaștem de asemenea că dacă $n = 0$ atunci funcția este **creșcătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$ atunci $f(a) < f(b)$), dacă $m < 0$ funcția este **descrescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$ atunci $f(a) > f(b)$). Dacă $m = 0$ funcția este **constantă**; graficul ei este o dreaptă paralelă cu axa Ox .

Pentru reprezentarea grafică a unei funcții liniare este suficient să cunoaștem doar două puncte ale graficului.

Exemple 1) Fie funcția $f: R \rightarrow R$ dată de $f(x) = 2x - 4$. Ea este o funcție liniară, aici $m = 2$ și $n = -4$. Avem $f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$ și $f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$, deci punctele $A(1, -2)$ și $B(3, 2)$ aparțin graficului. Graficul funcției va fi dreapta AB (vezi figura 5). Dacă $M(x, y)$ este un punct al dreptei AB atunci

coordonatele sale $(-5; 4)$ verifică relația $-2x + 4 = 0$. În afara de punctele dreptei AB nu există altele care să verifice această relație. Spunem că AB este **dreapta de ecuație** $y = 2x + 4$ ($= 0$).

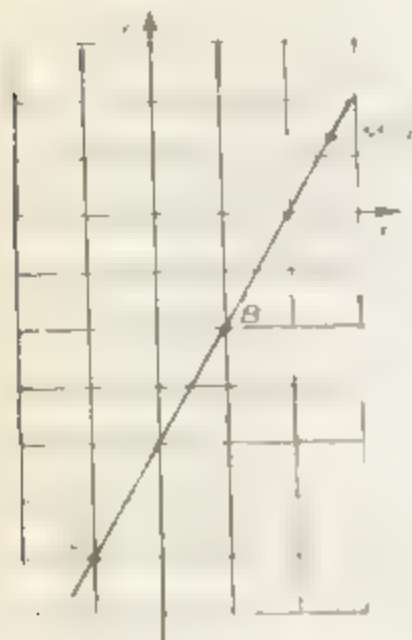


Fig. II 5

Adesea, pentru a reprezenta grafic o funcție univariată, determinăm punctele în care graficul intersectează axele de coordonate. Pentru aceasta, ținem seamă de faptul că **axa Ox are ecuația $y = 0$** , iar **axa Oy are ecuația $x = 0$** . Pentru funcția din acest exemplu, găsim intersecția graficului cu axa Ox rezolvând sistemul :

$$\begin{cases} y = 2x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \text{obținem soluția } (2; 0).$$

Intersecția cu axa Oy este dată de soluția sistemului

$$\begin{cases} y = 2x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad , \text{adică de } (0, -4).$$

Deci, dreapta se obține unind punctele $A(2; 0)$ și $B(0; -4)$ (vezi figura 6).
 2) Să reprezentăm grafic funcția $f: [1; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ descrescătoare de $f(x) = x + 1$.
 Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcție crescătoare descrescătoare de $g(x) = -x + 1$. Graficul funcției g este dreapta determinată de punctele $(-1; 0)$ și $(0; 1)$. Am reprezentat această dreaptă în figura 7. Că linia de exemplu. Graficul funcției f va fi o parte a acestei drepte, și anume acea porțiune din punctele $A(1; 2)$ care au abscisa x cuprinsă între 1 și 4. Deci f are ca puncte semnificative cele două punctele $A(1; 2)$ și $B(4; 5)$. Punctele A și B aparțin graficului funcției f .

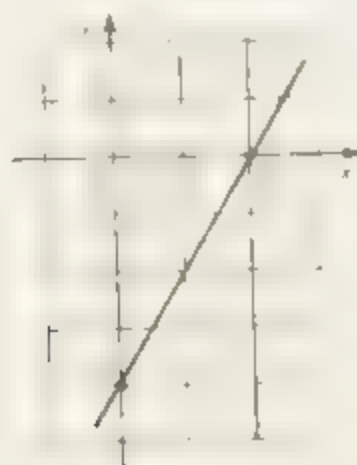


Fig. II 6

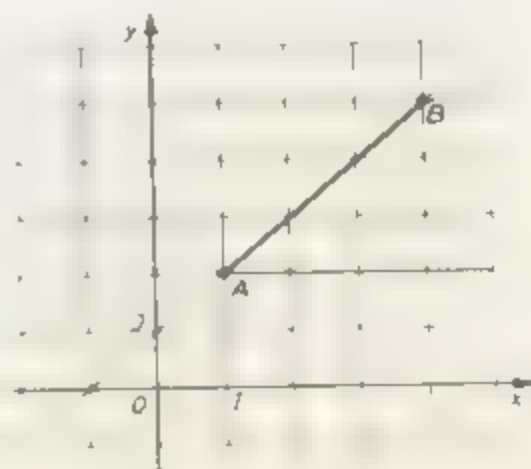


Fig. II 7

3) Funcția $h: (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x + 1$ are graficul desenat în figura 8. Punctele A și B nu aparțin graficului.

4) Funcția $k: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x + 1$ are ca grafic semidreapta cu originea în A reprezentată în figura 9. Punctul B nu aparține graficului.

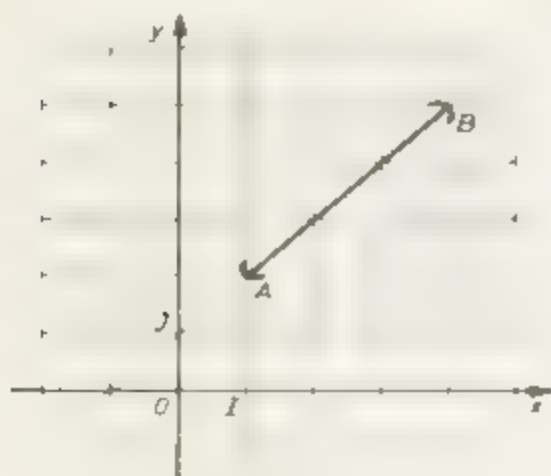


Fig. II.8

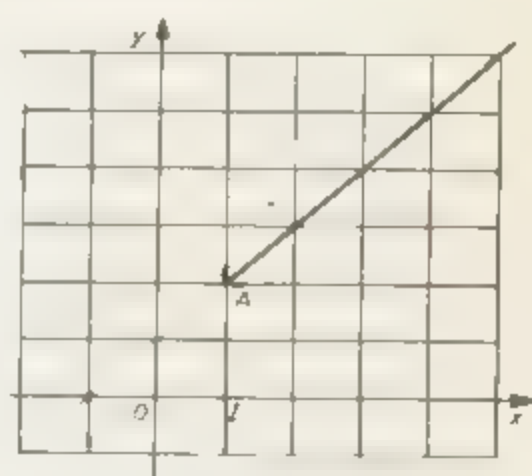


Fig. II.9

EXERCİTIU REZOLVAT

Să aflăm funcția liniară f pentru care $f(1) = 3$ și $f(2) = 5$ (deci al cărei grafic conține punctele $A(1; 3)$ și $B(2; 5)$).

Funcția f fiind liniară, este descrisă de $f(x) = mx + n$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rămâne să aflăm valorile lui m și n .

Avem $f(1) = m \cdot 1 + n = m + n$ iar $f(2) = m \cdot 2 + n = 2m + n$. Deci pentru a afla valorile lui m și n va trebui să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} m + n = 3, \\ 2m + n = 5 \end{cases}$$

Rezolvându-l găsim $m = 2$, $n = 1$. Funcția liniară căutată este descrisă de formula $f(x) = 2x + 1$.

EXERCİȚII

9

- 1) Aflați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 2) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.
 3) Construiți graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 2$.
 4) Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, funcțiile

$f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrise de

$$f(x) = x, g(x) = x + 2, h(x) = -x - 2.$$

5) Comparați între ele graficele funcțiilor

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 2,$$

$$g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 2$$

$$f_1 : (0; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = -2x + 2;$$

$$f_2 : [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -2x + 2$$

5) Reprezentați grafic funcțiile :

$$a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dacă } x < 0 \\ -1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

$$b) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \leq 0, \\ 0 & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ x - 2 & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}$$

6) Reprezentați grafic funcțiile :

$$f : (2 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - 2 \sqrt{x - 2} \quad x \in \mathbb{R}, x \geq 2$$

7) Pentru ce valori ale lui m funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = (m - 1)x + \frac{m}{m+1}$ este :

a) crescătoare ; b) descrescătoare , c) constantă ?

8) a) Determinați funcția liniară f pentru care $f(1) = 10$, $f(2) = -4$

b) Determinați funcția liniară g pentru care $g(0) = 2$, $g(1) = 4$, $g(2) = 6$, $g(3) = 8$

c) Există o funcție liniară h astfel încât $h(1) = 2$, $h(2) = 3$?

d) Reprezentați grafic funcțiile f și g .

9) Să presupunem că pe măsură ce coborâm spre centrul Pământului, fiecare 30,5 metri

temperatura crește cu 1°C , iar la suprafață temperatura este de 20°C .

a) Stabiliți o formulă care să descrie dependența temperaturii de adâncime

b) Ce temperatură va fi la adâncimea de 122 m ?

c) La ce adâncime temperatura va fi de 36°C ?

10) Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dacă } x \geq 2, \\ -x + 2 & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$$

3. FUNCȚII PĂTRATICE

Ne propunem să studiem funcția care face să corespundă fiecărui număr real pătratul său :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Să completăm mai întâi un tabel de valori :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Valorile funcției trecute în tabel ne indică că să crească pe intervalul $[-\infty; 0]$ și crească pe $[0; +\infty)$.

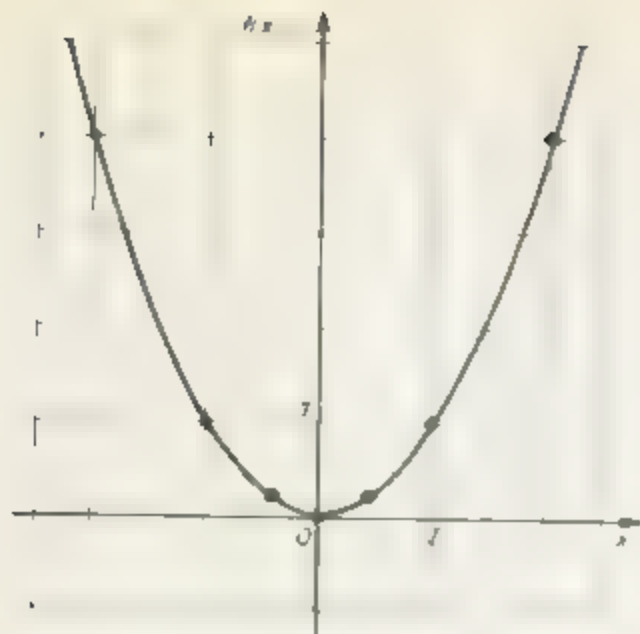


Fig. II.10

În figura 10 prezentăm graficul acestei funcții. Am scos în evidență punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul de valori de mai sus. Graficul funcției este o *parabolă*.

Vom numi funcție **pătratică** orice funcție de forma :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c;$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$.

În particular, funcția f de mai sus este o funcție pătratică ($a = 1, b = 0, c = 0$).

Graficul oricărei funcții pătratice este o parabolă.

EXERCIIU RI ZOLVAT

Să determinăm funcția pătratică g care poartă cu ea valoarea $g(1) = 0$ și $g(3) = 4$.

Știm că $g(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Avem $g(1) = a + b + c = 0$ și $g(3) = 9a + 3b + c = 4$. Coeficienții a, b și c . Avem $g(1) = a + b + c = 0$ și $g(3) = 9a + 3b + c = 4$. Coeficienții a, b și c aflăm rezolvînd sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 9a + 3b + c = 4. \end{cases}$$

Înlocuim acest sistem prin cel echivalent cu el, obținut din primul ecuație pe prima, iar din a treia pe a doua :

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b = 4. \end{cases}$$

Scazînd acum din a treia ecuație pe a doua :

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b = 4, \\ 2a = -4. \end{cases}$$

Accestui sistem se adăuga un al doilea sistem de ecuații, soluția sa este $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$.
 Astfel funcția pătratică căutată este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

EXERCITII

1) Completați tabelul.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x) = \frac{1}{2}x$											
$f(x) = x$											
$f(x) = 2x$											
$f(x) = x^2$											

Repetă exercițiul pentru funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ definite pe \mathbb{R} cu valori reale (luați ca unitate de măsură, pe ambele axe, 1 cm).

2) Aceeași problemă, pentru funcțiile g , h , k , l și m .

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x) = x$									
$h(x) = x^2$									
$k(x) = x^2 + 1$									
$l(x) = x^2 - 2$									

Ce observați?

3) Aceeași problemă, pentru funcțiile n , h , m , h .

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$n(x) = x$						
$h(x) = x^2$						
$m(x) = x^2 + 1$						

4) Aceeași problemă, pentru funcțiile k_1 , k_2 , k_3 , k_4

$$k_1(x) = x$$

$$k_2(x) = x^2$$

$$k_3(x) = (x - 2)^2$$

$$k_4(x) = (x - 1)^2$$

Ce observați ?

5) Ia cunoscați funcția pătratică ce are proprietatea că $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 0$.

☐ Care funcție pătratică are graficul o parabolă ce conține punctele $A(1, 4)$, $B(2, 3)$ și $C(3, 4)$?

7) Reprezentați grafic funcția ce descrie dependența ariei unui pătrat (măsurată în cm^2) de lungimea laturii sale măsurată în cm . Alegeți unitatea de măsură de 4 cm pe fiecare axă de coordonate. Completați apoi tabelul

latura l (cm)	1,4	2				10
aria A (cm^2)			8	10		

☐ În figura 11 vedeți desenați curbă ce seamănă cu un arc de parabolă. Ea este graficul unei funcții f . Completați tabelul.

t	0,5	1	1,5
$f(t)$			

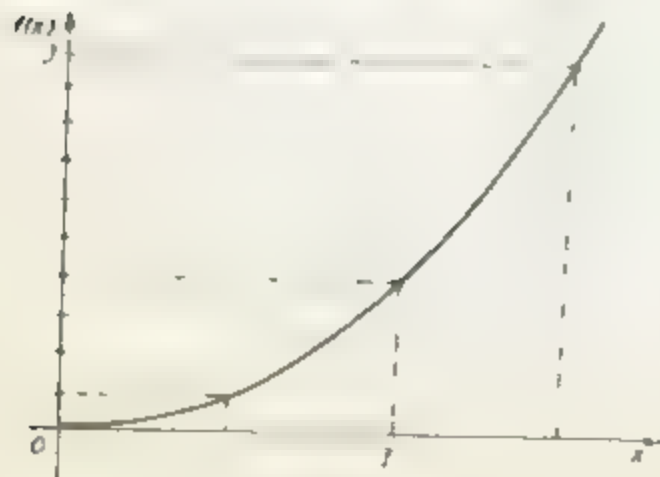


Fig. II.11

Este într-adevăr un arc de parabolă ?

☐ Înălțimea h (în kilometri) atinsă de o rachetă la t minute după lansare este dată în tabelul

durata zborului t	0	1	2	3	4
înălțimea h	0	25	100	225	400

Puteți descrie mișcarea rachetei printr-o funcție ? Aflați înălțimea atinsă după 10 minute de la lansare, presupunând că motoarele rachetei funcționează tot timpul

4. ALTE FUNCȚII

Orice număr real x , diferit de zero, are un invers care a fost notat $\frac{1}{x}$ sau x^{-1} . Să considerăm tabelul :

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Putem considera funcția

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Graficul acestei funcții (vezi figura 12) este o *hiperbolă*.

Fie x un număr real $\neq 0$ putem extrage rațional, din $y = \frac{1}{x}$ ca rezultat obținem numărul real $\frac{1}{x}$.

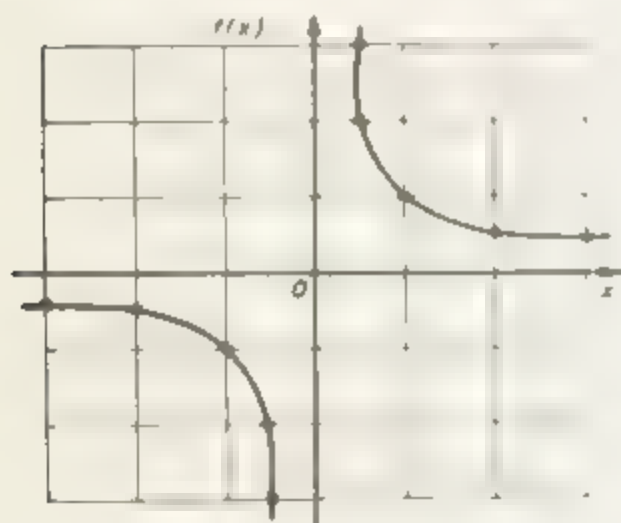


Fig. II.12



Fig. II.13

Să completăm un tabel (consultă și tabelul de la stiusul manualului)

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
\sqrt{x}	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2} \approx 1.41 \dots$	$\sqrt{3} \approx 1.73 \dots$	2

Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de $f(x) = \sqrt{x}$ are graficul prezentat în figura 13.

EXERCITII

1) Reprezentați grafic, completând mai întâi un tabel de valori, funcția

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$$

2) Un arhitect vrea să proiecteze un sistem de iluminat pentru un spațiu cu o formă de bază dreptunghiulară de dimensiuni $10\text{ m} \times 10\text{ m}$. El dorește să instaleze un număr de lumini care să ilumineze uniform spațiul. Dacă distanța minimă de la o lumină la un colț al spațiului este de 2 m , câți lumini trebuie instalate și unde?

4) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dacă R este un rezistor de rezistență R (ohmi), intensitatea sa I variază astfel:

$$I(R) = \frac{1}{R}$$

a) Trasați graficul dependenței lui I față de R .

b) Rezistorul este protejat de o siguranță fuzibilă de 5 A . Care este valoarea maximă a rezistenței R care poate fi conectată la circuit?

5) Reprezentați grafic funcția $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

TRUCĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUSIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pentru } x < 0 \\ 2 & \text{pentru } 0 \leq x \\ x^2 & \text{pentru } x > 2 \end{cases}$$

Calculați $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

2) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție definită prin $f(x) = \frac{1}{x^2}$, calculați $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$, $f(10)$.

4) Un kilogram de porumb costă 15 lei . Dacă x este numărul de kilograme de porumb cumpărate, iar y este suma plătită, scrieți funcția care descrie relația dintre x și y . Trasați graficul acestei funcții.

CAPITOLUL III

3.1. POLINOAME ȘI FRACȚII RAȚIONALE

3.1.1. POLINOAME OPERAȚII CU POLINOAME

Am învățat să calculăm în VI și în VII-a să facem calcule cu numere reprezentate prin litere și în primul rând cu polinoame.

Să ne reamintim că, de exemplu,

$$Y^3 Y^2 = 2Y^4 + 3$$

este un polinom $P(Z) = 4Z^4 + 3$ unde $Z = Y$ de gradul 5

$$Z^2 + \frac{1}{2}Z + 4$$

este un polinom în nedeterminata Z de gradul 2. De asemenea numerele diferite de 0 pot fi considerate polinoame de gradul 0 în orice nedeterminată, pentru înțelegerea asta considerăm că numărul 0 este polinom (dar că nu are grad). Numerele reale care sunt luate ca polinoame vor fi numite **polinoame constante**.

Ne vom ocupa în special cu polinoame într-o singură nedeterminată, aceasta va fi notată de obicei cu litera X .

Am învățat în clasa anterioară că orice polinom poate fi scris în formă canonică. De asemenea am învățat să efectuăm trei operații cu polinoame: adunarea, scăderea și înmulțirea; să le repetăm prin:

EXERCITII

1) Scrieți în formă canonică polinoamele:

$$a) \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{5}X^2 + 5X - 6, \quad b) X^3 - (X^2 - 1) - 2X + 4X^2 - 8X, \quad c) X^4 - X^3 + X^2 - X$$

2) Scrieți în formă canonică suma polinoamelor

$$a) 7X^2 - 3X + 5 \text{ și } 2X^2 + 7, \quad b) 2X^3 + 5 \text{ și } 4X^2 - 3X + 6; \quad c) 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 \text{ și } 1 + X + X^2 + X^3 + X^4, \quad d) X^4 - X^3 + 1, X^2 + X + 1 \text{ și } X^2 - 2X^3 + 1.$$

$$e) \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{5}X^2 + 5X - 6 \text{ și } X^3 - (X^2 - 1) - 2X + 4X^2 - 8X \text{ pentru } a = b \text{ dăme } a \text{ rezultat } X^4 - X^3 + 1$$

4) Efectuați calculele

$$a) (x^2 + 1) - 5x = 2x - 1 \quad b) (x^2 + 1) - 3x = 2x - 6 \quad c) (3x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 2x^2 - 3 \quad d) (5x^2 + 6x + 3) - (x^2 + 2x) = (2x^2 + 4x + 3).$$

5) Efectuați înmulțirile

$$a) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad b) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad c) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad d) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad e) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

2 ÎMPĂRȚIREA POLINOAMIILOR

Fie monoamele $6X^5$ și $2X^3$. Constatăm că :

$$6X^5 = 3X^2 \cdot 2X^3 ;$$

putem scrie astfel :

$$6X^5 : 2X^3 = 3X^2.$$

Observați relația între gradele monoamelor : $5 - 3 = 2$

În general, dacă $m \geq n$ și $b \neq 0$, atunci :

$$aX^m : bX^n = (a : b)X^{m-n}$$

care se mai scrie și :

$$aX^m : bX^n = \frac{a}{b} X^{m-n}.$$

La fel procedăm și la cazul unor monoame în mai multe nedeterminate , de exemplu :

$$12X^3Y^2 : 4XY = (12 : 4)X^{3-1}Y^{2-1} = 3X^2Y,$$

$$(-14XYZ) : 2XY^2Z = (-14 : 2)X^{1-1}Y^{1-2}Z^{1-0} = -7YZ,$$

$$\left(\frac{1}{2}X^2Y^3 \right) : \left(\frac{1}{2}XY \right) = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right) X^{2-1}Y^{3-1} = 1X^1Y^2 = XY^2,$$

$$22X^4 : 11 = (22 : 11)X^{4-0} = 2X^4.$$

EXERCITII

1) Efectuați calculele

$$a) (x^2 + 1) - 5x = 2x - 1 \quad b) (x^2 + 1) - 3x = 2x - 6 \quad c) (3x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 2x^2 - 3 \quad d) (5x^2 + 6x + 3) - (x^2 + 2x) = 4x^2 + 4x + 3 \quad e) (25x^2 + 5x + 1) - (x^2 + 1) = 24x^2 + 5x$$

2) Efectuați

$$a) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad b) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad c) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad d) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad e) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$f) (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

Fie polinoamele $P(X) = 3X^2 + 4X$ și $Q(X) = X + 2$. Constatăm că $P(X) = Q(X) \cdot (3X + 2)$ - putem spune că polinomul $Q(X) = X + 2$ este *cîtlă* împărțirii polinomului $P(X)$ la $Q(X)$.

Alt exemplu : deoarece

$$X^2 + 4 = (X + 2) \cdot (X + 2)$$

putem spune că polinomul $X + 2$ este citul împărțirii polinomului $X^3 - 4$ la polinomul $X - 2$.

Să încercăm să împărțim polinomul $P(X) = 2X^3 + 5X + 1$ la polinomul $Q(X) = X^2 + X$. Citul lor ar trebui să aibă gradul $3 - 2 = 1$. Să presupunem că acest cit este polinomul $C(X) = aX + b$; atunci :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (aX + b)$$

$$\text{de unde : } 2X^3 + 5X + 1 = aX^3 + (a + b)X^2 + bX.$$

Identificând coeficienții, obținem :

$$\begin{array}{ll} 2 = a & \text{(coeficienții lui } X^3), \\ 0 = a + b & \text{(coeficienții lui } X^2), \\ 5 = b & \text{(coeficienții lui } X), \\ 1 = 0 & \text{(termenul liber)} \end{array}$$

ceea ce este absurd.

Presupunerea făcută ne a condus la o concluzie absurdă – ci este deci falsă. Nu putem împărți „fără rest” polinomul $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$.

Să observăm însă că :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (2X - 2) + 7X + 1$$

astfel putem spune că prin împărțirea lui $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$ am obținut **citul** $2X - 2$ și **restul** $7X + 1$.

Să observăm că gradul restului este 1 – mai mic decât gradul împărțitorului $X^2 + X$, care este 2.

Practic, procedăm astfel :

- împărțim monomul $2X^3$ la monomul X^2 și obținem $2X$;
- înmulțim pe $2X$ cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $2X^3 + 2X^2$ pe care-l scădem din deîmpărțit ;
- deîmpărțitul se înlocuiește cu $-2X^2 + 5X + 1$, împărțim monomul $-2X^2$ la monomul X^2 , obținând -2 ;
- înmulțim pe -2 cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $-2X^2 - 2X$, pe care-l scădem din $-2X^2 + 5X$;
- deîmpărțitul se înlocuiește cu $7X + 1$ deoarece monomul $7X$ nu mai poate fi împărțit la monomul X^2 , împărțirea s-a terminat. Citul este $2X - 2$ iar restul este $7X + 1$.

$$\begin{array}{r} 2X^3 + 5X + 1 \\ (-) - (X^2 + X) \cdot 2X \\ \hline -2X^2 + 5X + 1 \\ (-) - (X^2 + X) \cdot (-2) \\ \hline 7X + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} X^2 + X \\ \text{citul} \\ \text{restul} \end{array}$$

Se obișnuiește să se schimbe semnul fiecărui produs parțial, efectuându-se adunări în loc de scăderi, calculele se aranjează astfel:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x + 1 \\ 2x^2 + 3x + 2 \\ \hline 2x^2 + 5x + 1 \\ 2x^2 + 3x + 2 \\ \hline 2x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

la polinomul $9X^2 + X + 4$.

$$\begin{array}{r} 81X^4 - 10X^2 + 35X + 1 \\ -81X^4 - 9X^3 - 36X^2 \\ \hline -9X^3 - 46X^2 + 35X \\ 9X^3 + X^2 + 4X \\ \hline 45X + 40X + 1 \\ 45X^2 + 5X + 20 \\ \hline 44X + 21 \end{array}$$

Deci citul împărțirii este $9A + 6$ iar restul $44A + 21$.

În general, se poate demonstra o *teoremă a împărțirii cu rest* pentru polinoame. Aceasta se enunță astfel:

TEOREMA — Se polinomial $f(x) = x^2 + px + q$, $(p, q) \in \mathbb{R}$ ad $q \neq 0$ cu coeficienti numere reale,


Existe un polinomi $C(X)$ s. un polinomi $A(X)$ satismet

$$H(X) = O(X) \cdot C(X) + H(X)$$

și astfel în cel gradul polinomului $R(X)$ să fie mai mic decât q . Polinoamele $Q(X)$ și $R(X)$ cu aceste proprietăți sînt unice.

Observation form canonică

EXERCISE

 Efectuați împărțirile +

a) $(3x^3 - 6x^2 + 2x) : 3x$, b) $(6x^4 - 5x^3 + 4x^2) : (-2x^2)$

 2) Efectuați împărțirile :

a) $(X^2 - 5) : (X - 2)$; b) $(3Y^2 + 20) : (Y - 3)$; c) $(3X^2 - 27) : (X - 3)$; d) $(8Y^2 - 2) : (2X - 1)$; e) $(25 - 30Y + 9Y^2) : (3X - 5)$; f) $(X^3 - 6X^2 + 11X - 10) : (X - 4)$.

3) Efectuati împărțirile .

a) $(X^2 + 1) \cdot (X + 1)$, b) $(X^3 + 1) \cdot (X + 1)$, c) $(X^4 + 1) \cdot (X + 1)$, d) $(X^5 + 1) \cdot (X + 1)$.

$\epsilon(V) = \{v \in V : v \text{ is a vertex of } P\}$. The path graph P_n has vertices v_1, v_2, \dots, v_n and edges (v_i, v_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, n-1$.



Efectuați împărțirile

a) $(X^3 + 1) : (X + 2)$, b) $(X^3 + 1) : (X^2 + 2)$, c) $(X^3 + 1) : (X^2 + 2)$. Ce observați?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (deci } (X^3 + 1) : (X + 2) \text{ și } (X^3 + 1) : (X^2 + 2) \text{ nu se pot efectua)}$$

Ce observați?

Ex. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$ este $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$, deoarece $6X + 1 = 6X + 1$ în $\mathbb{Z}_7[X]$. Efectuați împărțirile $(6X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_7[X]$ și $(6X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_7[X]$ și observați că obținem cel în $\mathbb{Z}_7[X]$ și cel în $\mathbb{Z}_7[X]$.
De ce?

7) Efectuați împărțirile.

a) $(X^3 - 2X^2 + X + 2) : (X^2 - X^2 - X + 1)$; b) $(X^3 + 2 - X - 2X^2) : (4 - 4X + X^2)$; c) $(X^4 - (X - 6X) - (X^2 - 2)) : (4X^2 + X - 1)$

$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ este $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_9[X]$, deoarece $8X + 1 = 8X + 1$ în $\mathbb{Z}_9[X]$.
Efectuați împărțirile $(8X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ și $(8X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ și observați că obținem cel în $\mathbb{Z}_9[X]$ și cel în $\mathbb{Z}_9[X]$.
De ce?

a) $(X^4 - 3^4) : (X + 3)$; b) $(15X^3 + 263X^2 + 81X^2) : (3X + 4)$; c) $(2X^4 + 3X^2Y + 2XY - Y^4) : (X^2 - 9Y^2)$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ este $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_9[X]$, deoarece $0X + 1 = 0X + 1$ în $\mathbb{Z}_9[X]$.
Efectuați împărțirile $(0X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ și $(0X + 1) : (X + 1)$ în $\mathbb{Z}_9[X]$ și observați că obținem cel în $\mathbb{Z}_9[X]$ și cel în $\mathbb{Z}_9[X]$.
De ce?

a) polinoame în nedeterminata X , b) polinoame în nedeterminata Y

10) Efectuați calculele

$$[(X^2 - 9) \cdot (X^2 + 2X)] : [(X + 2)(X - 3)] \cdot (X^2 - 3X)^2 \cdot (X + 2)^2$$

2 DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR POLINOAME DIVIZIBILE

Definiție $Q(X)$ divide polinomul $P(X)$ dacă există un polinom $C(X)$ astfel încât $P(X) = Q(X) \cdot C(X)$ (adică dacă restul împărțirii $P(X) : Q(X)$ este polinomul nul). În acest caz vom nota $Q(X) \mid P(X)$ sau $Q \mid P$ (și vom citi „ Q divide pe P ”).

Dacă $Q \mid P$ vom spune că polinomul P este **multiplu** al polinomului Q , sau că P se divide cu Q .

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$ este $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$, deoarece $1X + 0 = 1X + 0$ în $\mathbb{Z}_7[X]$.
scriem $(X + 1) \mid (X^2 - 1)$

Polinomul $2X^3 - 1$ divide polinomul $2X^3 + 6X^2 - X - 3$, deoarece $2X^3 + 6X^2 - X - 3 = (2X^3 - 1) \cdot (X^2 + 3)$

Polinomul $2X^2 + 4$ divide polinomul $2X^2 + 4$, deoarece $2X^2 + 4 = (2X^2 + 4) \cdot 1$

Polinomul $2X^2 + 4$ divide polinomul $2X^2 + 4$, deoarece $2X^2 + 4 = (2X^2 + 4) \cdot 1$

Polinomul X nu divide polinomul $X + 1$, deoarece împărțind pe $X + 1$ la X obținem restul 1. Ia fel $X + 3$ nu divide pe $X + 3X - 5$

Observație: $3X + 1$ divide polinomul 3 , deoarece $3 = (3X + 1) \cdot \frac{3}{3X + 1}$. Nu
polinomul $3X + 1$ divide polinomul 3 , deoarece $3 = (3X + 1) \cdot \frac{3}{3X + 1}$

EXERCITII

- 1) Stabiliti dacă polinomul Q divide sau nu polinomul P unde a) $P = 4X^5 - 3$, $Q = 3X^2 - 2$
 b) $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 4$, $Q = X^2 - 1$ c) $P = X^3 - 2X^2 + 4$, $Q = X^2 + 1$ d) $P = X^5 + 1$, $Q = X^2 - 1$.
 e) $P = X^3 - 1$, $Q = X^2 + X - 1$ f) $P = X^3 - 4X^2 + 5$, $Q = 2X^2 - 10$

2) Stabiliti dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau nu:

- a) $X^2 + 1 \mid X^3 + 1$ b) $X^2 + 1 \mid X^3 - 1$ c) $X^2 + 1 \mid X^3 - X^2 + 2$ d) $3 \mid 4X^2 + 1$
 e) $X^2 + 1 \mid X^3 + 1$

3) Pentru ce valori ale lui m polinomul $2X^2 + 5X + m$ se divide cu polinomul $X + 2$?

4) Fie polinomul $P(X) = X^3 - X^2 - X + 2$. Scrieți trei polinoame care îl divid. Aceeași problemă pentru polinomul $X^3 - X^2 + 9X - 27$.

5) Arătați că dacă polinomul R divide polinomul Q iar polinomul Q divide polinomul P atunci R divide pe P . Această proprietate care este de divizibilitate între polinoame este aceeași?

6) Arătați că dacă Q divide pe P și pe R atunci Q divide și pe $P + R$.

Definiție Vom spune că un polinom $P(X)$ este **reductibil** dacă poate fi scris ca produs de polinoame:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X),$$

factorii Q și R având gradele ≥ 1 .

De exemplu, polinomul $X^2 - 1$ este reductibil:

$$X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$$

de asemenea, polinomul $X^2 + X - 2$ este reductibil

$$X^2 + X - 2 = (X - 1) \cdot (X + 2)$$

Și polinomul $X^4 + 1$ este reductibil:

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 = (X + i) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \cdot (X - i)$$

Ca exemple de polinoame ce nu sunt reductibile avem în primul rând polinomul nul și apoi polinoamele constante $\neq 0$. Celelalte polinoame ce nu sunt reductibile vor fi numite **irreductibile**.

Observați schema de clasificare a polinoamelor

- Polinoame irreductibile
- Polinomul nul
- Polinoame constante $\neq 0$
- Polinoame reductibile

Comparați cu schema de clasificare a numerelor naturale

- Numere prime
- Numărul 0
- Numărul 1
- Numere compuse

Vom arăta că polinoamele de gradul 1 sînt ireductibile.
Să considerăm polinomul de gradul 1 :

$$aX + b, a \neq 0$$

Dacă am presupune că este reductibil :

$$aX + b = Q(X) \cdot R(X)$$

cu gradele lui Q și R mai mari decît 1, atunci din compararea gradelor am obține $1 < 1 + 1$, ceea ce este absurd. Deci orice polinom de gradul 1

$$aX + b, a \neq 0$$

este ireductibil.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori polinoamele :

a) $X^2 - 1$ b) $X^2 - 1$ c) $X^2 - 1$ d) $X^2 - 1$ e) $X^2 - 1$ f) $X^2 - 1$

2) Precizați care polinoame sînt reductibile

a) $X^2 - 4$ b) $X^2 - 2$ c) $X^2 - 4X + 4$ d) $2X^2 - 2$ e) $4X^2 - 2$ f) $X^2 - 8$ g) $X^2 - 1$ h) $X^2 - 1$

3) Fie $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Calculați $P(2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(-2)$, $P(-3)$, $P(4)$, $P(5)$.

(Notăm cu $P(a)$ numărul obținut înlocuind în polinom nedeterminata X cu numărul a și efectuăm operațiile indicate ; de exemplu, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1 = 35$.)

4) Fie $P(X) = X^3 + 2X^2 - 4X - 5$ și $Q(X) = X^2 - 2X - 4$. Calculați $P(a) \div Q(a)$ pentru $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ce observați ? De ce ?

4. ÎMPĂRȚIREA PRIN BINOMUL $X - a$

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = X^3 + 2X^2 - X + 1$ și să-l împărțim la binomul $X - 2$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 2X^2 - X + 1 \\ \underline{X^3 - 2X^2} \\ 4X^2 - X + 1 \\ \underline{4X^2 - 8X} \\ 7X + 1 \\ \underline{7X - 14} \\ 15 \end{array}$$

Obținem citul $X^2 + 2X + 3$ și restul 7. Pe de altă parte, să calculăm numărul $P(2)$. $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7$. Observăm că restul împărțirii este exact $P(2)$. Este oare aceasta o întâmplare ?

Să considerăm un polinom $P(X)$ și să-l împărțim (cu rest) la binomul $X - a$. Teorema împărțirii cu rest ne spune că există polinoamele $C(X)$ și $R(X)$ astfel încît :

a) $P(X) = (X - a) \cdot C(X) + R(X)$,

b) gradul lui R este mai mic decît gradul lui $X - a$.

Însă gradul lui $X - a$ este 1, adică polinomial rest $R(X)$ este constant $R(X) = r$. Putem deci scrie :

$$P(X) = (X - a) \cdot C(X) + r.$$

Putem afla restul r fără a face împărțirea ! În egalitatea de mai sus să înlocuim nedeterminata X prin numărul a :

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r$$

Deoarece $a - a = 0$ obținem că $r = P(a)$. Am dovedit de fapt următoarea

Teoremă Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomial $X - a$ se obține calculând valoarea $P(a)$.

Cum calculăm valoarea $P(a)$? Să luăm câteva exemple.

Fie $P(X) = X^2 + 2X - 3$, atunci $P(a) = a^2 + 2a - 3$. Observăm că pentru a obține pe $P(a)$ trebuie să efectuăm două înmulțiri și o adunare. Dacă scriem însă $P(X) = (X + 2)(X - 1) - 3$ atunci pentru a obține pe $P(a) = (a + 2)(a - 1) - 3$ efectuăm doar o înmulțire și două adunări.

Alt exemplu. Fie polinomul $P(X) = X^3 + 5X^2 + 6X + 4$ atunci $P(a) = a^3 + (a + a) + 5(a + a) + 6(a + a) + 4$. Pentru a obține pe $P(a)$ sunt necesari 4 înmulțiri și 3 adunări (scăderea este considerată adunare). Putem proceda în mod economic calculând cu formula $P(X) = (X^2 + 6X + 4)(X + 1) + 4$ efectuând doar 2 înmulțiri și 3 adunări.

EXERCITIUL REZOLVAT

Aflați valorile lui m și n astfel încât polinomul $P(X) = X^2 + mX + n$ să dea restul 2 la împărțirea cu $X - 1$ și restul 5 la împărțirea cu $X - 3$. Ce rest vom obține dacă vom împărți polinomul $P(X)$ la $X - 5$?

Rezolvare. Scriem $P(1) = 2$ și $P(3) = 5$, adică :

$$\begin{cases} 1 + m + n = 2 \\ 9 + 3m + n = 5 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații obținem $m = -\frac{5}{2}$ și $n = \frac{9}{2}$.

Putem calcula acum restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - 5$:

$$P(2) = 2^2 - \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

EXERCITII

1. Aflați restul împărțirii polinomului $5X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ la :

a) $X - 1$ b) $X - 2$ c) $X - 3$ d) $X - 5$ e) $X - 10$

7) Aflați restul împărțirii polinomului $X^3 - 2$ la polinoamele

a) $2X^2 + X - 10$; b) $3X^2 + 4X - 5X - 2$; c) $2X^2 - 3X + 5$; d) $4X^2 - X + 5$; e) $3X - 8X - 3$

8) Aflați restul împărțirii polinomului $3X^3 - mX^2 - 15$ la $X - 4$ știind că împărțirea la $X - 2$ dă restul -3 .

4) Aflați restul împărțirii polinomului $X^4 + 3ax + a - 1$ la binomul $X - a$, știind că prin împărțirea la $X - 3$ dă restul 5 .

5) Aflați restul împărțirii polinomului $2X^3 - mX^2 - nX - 6$ la $X - 3$ și $X + 1$ obținând, în ambele cazuri, restul -2 . Ce rest vom obține dacă-l vom împărți la $X - 1$?

6) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - a$ obținând restul r și împărțirea la $X - b$ obținem același rest r .

În acest capitol am învățat criterii de divizibilitate cu anumite numere prime $2, 3, 5$. Vom stabili acum un criteriu de divizibilitate cu polinomul ireducibil $X - a$.

Teoremă Un polinom $P(X)$ este divizibil cu binomul $X - a$ dacă și numai dacă $P(a) = 0$.

Demonstrație Dacă $P(X)$ este divizibil cu $X - a$ atunci restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - a$ este 0 ; însă acest rest coincide cu $P(a)$.

Reciproc, dacă $P(a) = 0$ atunci teorema împărțirii cu rest ne asigură că există un polinom $Q(X)$ astfel încât $P(X) = (X - a) \cdot Q(X)$, ceea ce înseamnă că $P(X)$ se divide cu $X - a$. Teorema este demonstrată.

Observație Dacă $a = 0$ și $Q = P(X)$, atunci $P(0) = 0$ și $P(X)$ este 0 , atunci $P(X) = 0$ și orice polinom este divizibil cu $X - 1$. De exemplu, polinoamele

$$2X^3 - 3X + 1, 5X^2 - 3X^2 - 2X^2 + 4X - 2X - 2, X^2 - 2X + 1$$

se divid cu $X - 1$.

EXERCITII

1) Care dintre polinoamele de mai jos sînt divizibile cu $X - 1$?

a) $7X^3 - 5X + 4$; b) $6X^3 - 5X^2 - 1$; c) $42X^2 + 27X - 69$; d) $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X + 1$; e) $2X^3 - 3X + 8X - 5$.

2) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - a$ și $X - b$ obținând, în ambele cazuri, restul -2 .

a) $2X^3 + X - 10$ și $X + \frac{5}{2}$; b) $4X^3 - 5X^2 + 9X + 1$ și $X - 3$; c) $3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 5X - 38$ și $X - 2$; d) $2X^3 - 3X + 5$ și $X - 3$.

3) Să presupunem că $a^2 - 3a + 2 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$. Între ce valori se află a și polinoamele

a) $X^3 + X^2 - 9X - 9$; b) $X^3 + 3X^2 - 4X - 12$; c) $X^3 - 3X^2 - X + 3$; d) $X^3 - 4X^2 - 9X - 36$; e) $X^3 - 10X^2 + 9$; f) $X^3 + 6X^2 + 11X^2 + 6X$ este divizibil cu $X - a$?

5. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI FORMULE SPECIALE

Știm că un polinom ca produs de factori ireductibili prezintă aceeași avantajă ca și scrierea unui număr natural ca produs de factori primi, este utilă în special atunci când efectuăm operații cu fracții.

Nu putem descompune întotdeauna *efectiv* un polinom în factori ireductibili, de cele mai multe ori ne limităm la a-l descompune în doi factori.

În clasa a VII-a am învățat câteva formule speciale, care ne ajută în descompunerea în factori a polinoamelor. Să le reamintim:

— formula de scoatere a factorului comun:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

— formula de restrângere a pătratului binomului:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

— formula de descompunere în factori a diferenței pătratelor:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Să folosim aceste formule pe câteva exemple.

Exemplul 1 Polinomul $X^3 + 4X^2$ se descompune în factori în mod evident

$X^3 + 4X^2 = X^2(X + 4)$. La fel, polinomul $\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{3}X$ se descompune de exemplu

astfel: $X = \left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{6}X - \frac{1}{3}\right)$, sau astfel:

$$\frac{1}{6}X = (3X^2 + X - 2).$$

Exemplul 2 Constatăm imediat că polinomul $X^2 + 4X + 4$ este pătratul lui $(X + 2)$. La fel, polinomul $(5X + 2)^2 + 2(5X + 2) + 1$ este pătratul lui $(5X + 2) + 1 = 5X + 3$.

Exemplul 3 Polinomul $25X^2 - 9$ poate fi descompus în produsul $(5X + 3)(5X - 3)$ sau în produsul $(5X + 3)(5X - 3)$, ultima descompunere este o descompunere în factori ireductibili.

EXERCITII

1) Eliminați parantezele:

a) $(2X - 3)^2$; b) $(2X - 3)(X + 5)$; c) $5X \left(\frac{1}{5}X + 2 \right)^2$; d) $2X(3X - 8)(X - 1)$

e) $(X - 1)(X - 3)(X - 5)$

2) Scoateți factor comun

a) $14X^3 - 3X^2$; b) $8X^2 + 4X^3 + X^2$; c) $(3X - 1)^2 + 5(3X - 1)$; d) $(6X + 1)^4 + 3(6X + 1)^3$

$$c) 2 \left(X + \frac{1}{2} \right) + \left(X + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad X + X + \frac{1}{2} = (X + 1) + (X + 1) - (X + 1)$$

3) Completați până la pătratul unui binom:

$$a) 9X^2 \quad b) 9X^2 \quad c) 100 \quad d) 16 - 24X \quad e) 3X^2 - 12X$$

4) Restrângeți:

$$a) X^2 - X + 0,25 \quad b) 9X^2 - 12X + 4 \quad c) 9 - 12X^2 - 4X^2 \quad d) \frac{1}{4} X^2 - X + \frac{1}{4}$$

$$e) 12X^2 - 12X + 3.$$

5) Descompuneți în factori:

$$a) 39X^2 - 16 \quad b) (X - 2)^2 - (X + 5)^2 \quad c) X^2 - 5X + 6 \quad d) 8X^2 - 2X^2 \quad e) 5X^2 - 16X$$

[6*] Descompuneți în factori:

$$a) X^2 - 2 \quad b) X^2 - 3X \quad c) 2X^2 - X$$

O altă formulă specială, mult utilizată în descompunerile în factori, este **formula diferenței cuburilor**:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Asemănătoare este și formula sumei cuburilor:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Observați cu atenție deosebirile dintre cele două formule:

EXERCITII

1) Descompuneți în factori polinoamele:

$$a) 8X^2 - 27 \quad b) (X + 2)^2 + (X - 2)^2 \quad c) 64 - X^2 \quad d) X^2 + 27X^2 \quad e) 8X^2 + 125 \quad f) 16X^2 + \frac{1}{4}$$

2) Descompuneți în factori:

$$a) X^3 + 2X(X - 1) - 1 \quad b) X^2 + 2X^2 + 1 \quad c) X^2 + X^2 - X - 1 \quad d) X^2 - X + X - 1$$

[3*] Descompuneți în factori:

$$a) X^2 - 2 \quad b) X^2 - 3 \quad c) X^2 - 4 \quad d) X^2 - 5$$

Uneori putem descompune un polinom în factori cautându-l un factor de gradul 1.

De exemplu, fie polinomul $P(X) = X^2 - 5X + 4$. Suma coeficienților săi $1 - 5 + 4 = 0$, este 0. Deci, polinomul se divide cu $X - 1$. Efectuând împărțirea, obținem $P(X) = (X - 1)(X - 4)$ și observăm că putem descompune $P(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

Alt exemplu. Să descompunem în factori polinomul $P(X) = X^2 - 7X$.

$12X + 18$. Deoarece suma coeficienților săi este 0, polinomul se divide cu $X - 1$. $P(X) = (X - 1)(X^2 + X - 6X - 18) = (X - 1)(X^2 - 5X - 18) = 0$, putem descompune $X^2 + X - 6X - 18 = (X - 3)(X - 4X + 6)$. Deci, am descompus $P(X) = (X - 1)(X - 3)(X^2 + 4X + 6)$.

Din exemplele de mai sus rezultă că în general descompunerea în factori a unui polinom este dificil de executat. Nu există reguli generale de lucru, trebuie folosite toate posibilitățile avute la îndemână, uneori chiar artificii de calcul ce denotă ingeniozitate.

Observație Dacă un polinom are ca coeficienți numere întregi și se divide cu $X - a$ unde $a \in \mathbb{Z}$, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului. Verificați aceasta pe exemplele de mai sus.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori

- a) $X^2 - X - 6$ b) $X^2 + X - 6$ c) $X^2 - 10X + 16$ d) $X^2 - 7X - 12$ e) $X^2 - 9X + 18$
f) $3X^2 - 7X + 2$.

2) Descompuneți în factor

- a) $X^3 - 7X^2 - 6$ b) $X^3 - 6X^2 - 11X - 6$ c) $X^3 - 7X^2 - 36$ d) $X^3 - 3X^2 - 2$ e) $X^3 - 12X^2 + 16$ f) $4X^3 - 4X^2 - 9X + 9$

3) Descompuneți în factori

- a) $X^3 - 25X^2 + 60X - 36$ b) $X^3 - 6X^2 - 13X + 6$ c) $X^3 - 4X^2 - 3X + 4$ d) $X^3 - 5X^2 + 4$ e) $X^3 + 4X^2 - 32$ f) $X^3 - X^2 - 8X^2 + 8$

Polinoamele în mai multe nedeterminate se descompun mult mai greu în factori. Nu există metode generale, reușita descompunerii depinde foarte mult de utilizarea adecvată a formulelor speciale.

De exemplu, pentru a descompune în factori polinomul

$$X^3 + 2XY + Y^3 + XZ + YZ$$

grupăm termenii în două grupe: prima grupă (formată din primii trei termeni) este pătratul unui binom, în a doua grupă scoatem factor comun pe Z . Polinomul se scrie $(X + Y)^2 + (X + Y)Z$. Scoțând încă o dată factor comun, am descompus în factori: $(X + Y)(X + Y + Z)$.

Alt exemplu: fie polinomul $9X^3 - 6XY + Y^3 - 9$. Primii trei termeni pot fi restrinși, polinomul devine $(3X - Y)^2 - 9$. Folosind formula diferenței pătratelor, am reușit descompunerea polinomului în factori:

$$(3X - Y + 3)(3X - Y - 3)$$

Alte exemple:

$$X^4 - 3XY + Y^4 = X^4 - 2XY + Y^4 - XY = (X - Y)^2 - (XY) = (X - Y + XY)(X^2 - Y^2 - XY);$$

$$XY + X - Y - 1 = X(Y + 1) - (Y + 1) = (X - 1)(Y + 1) = (X + 1)(X - 1)(Y^2 + 1);$$

$$X^3 - Y^3 - Z^3 + 2YZ = 2X + 1 - (X - 2X + 1) - (Y - 2YZ + Z) - (X - 1)(Y - Z) = (X + Y - Z - 1)(X - Y + Z - 1),$$

$$X^3 - 5XY + 6Y^3 = X^3 - 2XY - 3XY + 6Y^3 = X(X - 2Y) - 3Y(X - 2Y) = (X - 3Y)(X - 2Y);$$

$$X^4 + X^3Y + Y^4 = X^4 + 2XY + Y^4 - XY = (X + Y)^2 - (XY) = (X + XY + Y)(X - XY + Y),$$

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (X^2 - Y^2) - (\lambda^2 + \lambda^2 Y^2) - Y^2 (X^2 - Y^2) - (\lambda^2 + \lambda^2 Y^2 + Y^2) (X^2 - Y^2) \\ & = (\lambda^2 - Y^2) (X^2 - Y^2) - (\lambda^2 + \lambda^2 Y^2 + Y^2) (X^2 - Y^2) = (\lambda^2 - Y^2 - \lambda^2 - \lambda^2 Y^2 - Y^2) (X^2 - Y^2) \\ & = (-2\lambda^2 - Y^2) (X^2 - Y^2) = -2\lambda^2 (X^2 - Y^2) - Y^2 (X^2 - Y^2) = -2\lambda^2 (X^2 - Y^2) - Y^2 (X^2 - Y^2) \end{aligned}$$

EXERCITII

$\left| \begin{array}{c} \uparrow \\ | \rangle \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$, which are $n = 0, 1, 2, \dots$. These fields have their own considerations for many,

a) $X' = \lambda Y + \lambda Y = Y'$, b) $A' = AB + AB + B'$, c) $X = AX + BX + AB$, d) $\lambda Y + 3X =$

7) Descomponet in factori :

a) $X'' + 2\lambda Y = 3Y''$, b) $X' = Y'$; c) $9X = 12\lambda Y + 4Y'$, d) $9X = 12\lambda Y + 3Y'$; e) $8(\lambda Y - 16Y')$, f) $27\lambda' - 64Y'$

[1°)] Descompuneri în factori

a) $(x^2 + 1) + (x + 1)$, б) $(x + Y)(x - Z) + (x - Z)(x - Y)$, в) $x - a - b + 2ab$,
 д) $(a^2x + b^2) + (b^2 - a^2)$, е) $x - 2\lambda Y + Y^2$, ж) $x + Y^2 - (x - 4\lambda Y + Y^2)$, з) $x^2 + 2\lambda Y +$

It is not clear whether the authors are referring to the *in vitro* or *in vivo* results. The *in vitro* results are more likely to be relevant to the current discussion, as they are more directly related to the mechanism of action of the treatment.

g) $X + 3X + 4X + 2$

MULTIPLE CHOICE ANSWER POLYNOMIAL

Exemplu: $Z(x) = x^5 - 5x^3 + 8x - 4$. Care sunt polinoamele care îl divid?
 c) scrieți ca produs de factori $Z(x) = \dots$ (puteți să-l descompunem în factori $Z(x) = \dots$)

$$(X - I) \cap X = \emptyset$$

4. $X^3 - 3X^2 + 2X$ este un polinom al lui $R[X]$ se divide cu $X - 1$ cu $X^2 - 2X$ cu $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$ și cu $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$.

the polynucleotide

$$P(X) = 6X^3 - 24X^2 \text{ si } Q(X) = 3X^3 - 12X^2 + 12X.$$

Descompunându-le în factori, putem scrie :

$$P(X) = 6X^3(X + 2)(X - 2), Q(X) = 3X(X - 2).$$

Se observă că α și $\alpha + 1$ este divizor al ambelor polinoame P și Q și $\alpha + 1$ este divizor comun polinoamelor P și Q . De asemenea, $\alpha + 1$ și $\alpha + 2$ sunt divizori comuni polinoamelor P și Q .

1) a și b sunt numere care sunt divizori comuni lui P și Q

- polinoamele constante a ;
 - polinoamele de forma aX ;
 - polinoamele de forma $a(X-2)$;
 - polinoamele de forma $aX(X-2)$.
- unde a este un număr real $\neq 0$

Observăm că toți divizorii comuni lui P și Q divid și pe $3A(A-2)$. $A(A-2)$ este însă cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q . Dacă luăm polinoma $3A(A-2)$ și polinomul $2A(A-2)$, observăm că la înmulțirea tuturor divizorilor lui P și Q , putem să le numim și pe cele comune lui P și Q , preferăm însă să lucrăm cu $A(A-2)$ deoarece coeficientul termenului de gradul cel mai mare este 1. Să observăm că divizorii comuni lui P și Q au gradele 0, 1 și 2, în cel mai mare divizor comun lui P și Q are gradul 2.

Definiție 1.1.1. Fie \mathcal{A} un aninel comutativ și M un \mathcal{A} -modul. Dacă M este finit generat și \mathcal{A} este local, atunci M este liber dacă și numai dacă M este izomorfic cu \mathcal{A}^n pentru un anumit n .

1) este divizor al lui $P(V)$ și al lui $Q(V)$.

mare divizor comun al polinoamelor P și Q

formă $u(t) \cdot v(t)$, unde u este un număr real $\neq 0$ are și el proprietățile 1) și 2).

pe care îl săgește cel mai mare număr de gradele divizorilor comuni lui P și Q .

Com putem obține efectiv cel mai mare divizor comun a două numere?

Factorii polinoiziali P și Q sunt descompuse în factori ireductibili, adică cu rădăcini divizor comune și se obține fiind produsul factorilor ireductibili comuni. În acest caz, nu mai este necesar să se facă distincția între cele două descompuneri.

De exemplu, fie polinoamele :

$$Q(x) = 2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8 = 2(x+2)^2(x^3 + 1)(x-1)$$

4. Dacă A este descindător, apar factori ireducibili $A = 2$, $A = 1$ și $A = 1$. Dacă A este descindător, apar în ambele descompuneri factorii $A = 2$ și $A = 1$ cu exponentul 2 și $A = 1$ cu exponentul 1 în cel mai mare divizor comun al lui P și Q (cel mai mare divizor comun al lui P și Q va fi polinomial).

$$f(x) = (x + 2)(x^2 + 1) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$$

Un exemplu: fie $A(X) = 2X^2 + 1$ și $B(X) = (X - 1)(X + 3)$. Nu există nici un factor ireductibil comun polinoamelor A și B , deci cel mai mare divizor comun al lui A și B este 1. polinoamele A și B sunt prime între ele.

EXERCISES

1) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :

1. a) $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ și $(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$; b) $(X - 1)(X + 5)$ și $(\lambda - 1)(\lambda + 5)$;
c) $(\lambda + 3)(\lambda - 3)$ și $(\lambda + 3)$; d) $14\lambda(\lambda + 7)$ și $4\lambda(X + 7)$; e) $3\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ și
 $4\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Scrieți în formă canonică

2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor

- a) $X^3 - X$ și $X^2 + 2X + X$, b) $X^2 + X$ și $X^2 + 2X + 1$, c) $4X^2 + 12X + 9$ și $8X^2 + 27$
 d) $X^3 - 3X + 2$ și $X^2 - X - 2$, e) $8X^3 - 32$ și $2X^2 - 14X + 20$, f) $X^3 - 7X^2 + 12X$ și $3X^2 - 6X - 24$
 g) $2X^3 + 2X^2 - 4$ și $4X^2 + 12X - 40$ h) $X^3 - X - 2$ și $X^2 - X^2 - 4X + 4$
 3) Scrieți în funcție de $D(X)$ și $Q(X)$ polinoamele $P(X)$ și $R(X)$ astfel încât să fie $P(X) = D(X) \cdot Q(X) + R(X)$, unde
 a) $Q(X) = X + 1$, $D(X) = X + 1$, b) $Q(X) = 2X - 8$, $D(X) = X - 2$, c) $Q(X) = 9X^2 - 12X + 4$, $D(X) = 3X - 2$

4) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor

- a) $X^2 - XY$ și $X^2 - 2XY + Y^2$, b) $6X^2 - 11$ și $9(X^2 - 1)(X - Y)$

5) Arătați că polinoamele

- a) $X^2 + 1$ și $X^2 + 1$, b) $X^2 + 3X + 2$ și $X^2 - 1$ sunt prime între ele

Nu întotdeauna putem descompune polinoamele în factori necompozabili. Metoda de aflare a celui mai mare divizor comun prezentată mai înainte nu este aplicabilă întotdeauna. De aceea vom prezenta încă o metodă algoritmică, numită **algoritmul lui Euclid***

Să luăm de exemplu polinoamele $P(X) = X^3 + 2X^2 - 24X - 24$ și $Q(X) = X^2 + X - 20$

Împărțim polinomul P la polinomul Q

$$\begin{array}{r} X^3 + 2X^2 - 24X - 24 : X^2 + X - 20 \\ X^3 + X^2 - 20X \\ \hline X^2 + 4X - 24 \\ X^2 + X - 20 \\ \hline 3X - 4 \end{array}$$

Obținem câtul 1 și restul $R(X) = 3X - 4$

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + (3X - 4)$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R

$$\begin{array}{r} X^2 + X - 20 : 3X - 4 \\ 3X^2 + 3X - 12 \\ \hline -2X + 8 \\ -2X + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Obținem câtul $X + 5$ și restul $R(X) = 0$

$$Q(X) = R(X) \cdot (X + 5) + 0$$

Deoarece restul R este 0, înseamnă că sporește restul $R(X) = X - 4$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q

4/1r - exemple. Fie polinoamele $P(X) = X^3 - 2X^2 - 4X - 4$ și $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 6$

* Euclid a descoperit că orice două numere naturale au un cel mai mare divizor comun și a prezentat un algoritm pentru a-l afla. Acesta este cunoscut și astăzi sub numele de algoritmul lui Euclid. Acesta este unul dintre cele mai importante rezultate din teoria numerelor și a fost folosit de autorul unui faimos tratat de geometrie

Împărțim polinomul P la polinomul Q (efectuăm împărțirea ¹⁾). Obținem citul $X + 1$ și restul $R_1(X) = 5X^2 + 10$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (X + 1) + (5X^2 + 10).$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1 (efectuăm ¹⁾). Obținem citul $\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}$ și restul $R_2(X) = 0$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5} \right) + 0.$$

Deoarece restul R_2 este 0, algoritmul se oprește, restul $R_1(X) = 5X + 10$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q .

Observație Putem spune că și $X + 2$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q .

Alt exemplu Să aplicăm algoritmul lui Euclid polinoamelor $P(X) = 2X^3 - 2X^2 - 2X - 4$ și $Q(X) = X^2 - 3X + 4$.

Împărțim polinomul P la polinomul Q . Obținem citul $2X + 4$ și restul $R_1(X) = 2X^2 - 10X + 12$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (2X + 4) + (2X^2 - 10X + 12).$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1 . Obținem citul $\frac{1}{2}X + 1$, iar restul $R_2(X) = 8X - 16$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{2}X + 1 \right) + (8X - 16).$$

Împărțim polinomul R_1 la polinomul R_2 . Obținem citul $\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}$ și restul $R_3(X) = 0$.

$$R_1(X) = R_2(X) \cdot \left(\frac{1}{4}X - \frac{3}{4} \right) + 0.$$

Algoritmul se oprește aici. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q este ultimul rest $\neq 0$ obținut, anume $R_2(X) = 8X - 16$.

EXERCIIII

1) Folosind algoritmul lui Euclid calculați cel mai mare divizor comun al polinoamelor

a) $X^3 + 3X + 2$ și $X^2 - X - 2$, b) $X^3 - 5X + 4$ și $X^2 + 2X - 6$, c) $12X^3 + 5X^2 - 3$ și $6X^2 + X - 1$, d) $5X^3 - 4X^2 - 1$ și $X^2 - 2X + 1$.



2)

Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor

a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ și $X^2 - 8X + 19$, b) $6X^3 - 13X^2 + 15X - 25$ și $2X^3 + 3X^2 + 4X - 10$, c) $6X^4 + X^3 - X$ și $4X^3 - 6X^2 - 4X + 3$, d) $2X^4 - 12X^3 + 9X^2 - 6X + 9$ și $4X^3 - 18X^2 + 9X - 3$, e) $X^4 + 2X^3 - X^2 + 2$ și $X^3 - X^2 + 2X - 1$, f) $2X^4 - 12X^3 + 9X^2 - 6X + 9$ și $4X^3 - 18X^2 + 9X - 3$, g) $3X^4 - X^3 - 3X^2 + 1$ și $3X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$, h) $X^5 - 17X^4 + 16$ și $X^3 - 12X^2 - 11$.

3) Sînt polinoamele $3X^2 - 4X + 1$ și $2X^2 + X + 1$ prime între ele? Dar polinoamele $4X^2 - 5X + 1$ și $X^2 - 5X + 4$?

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$ este un polinom $M(X)$ ce are proprietăți:

— polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ divid polinomul $M(X)$,

ade pe $T(X)$

Cu alte cuvinte :

— $M(X)$ este un multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$,

— dacă $T(X)$ este multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$, atunci $T(X)$ este multiplu și al lui $M(X)$.

Între polinoamele $P(X)$, $Q(X)$, cel mai mare divizor comun $D(X)$ al lor și cel mai mic multiplu comun $M(X)$ al lor există relația

$$P(X) \cdot Q(X) = D(X) \cdot M(X)$$

Această relație ne permite să îl aflăm pe $M(X)$ dacă îl cunoaștem pe $D(X)$

$$M(X) = \frac{P(X) \cdot Q(X)}{D(X)}$$

Dacă polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ sînt descompuse în factori ireductibili, atunci $M(X)$ poate fi luat produsul tuturor factorilor ce apar în descompuneri, fiecare factor la puterea cea mai mare.

De exemplu, cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

$P(X) = (X - 1)(X + 2)(X + 3)$ și $Q(X) = (X - 1)(X + 2)$ este polinomul $M(X) = (X - 1)^2(X + 2)^2(X + 3)$

EXERCITIUL REZOLVAT

Să aflăm cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $2X^2 - X$, $2X^2 + X$ și $4X^2 - 1$

Rezolvare: Descompunem cele trei polinoame în factori ireductibili

$$2X^2 - X = X(2X - 1)$$

$$2X^2 + X = X(2X + 1)$$

$$4X^2 - 1 = (2X + 1)(2X - 1)$$

În descompuneri apar factori ireductibili X , $2X - 1$ și $2X + 1$. Primul apare cu exponentul 2 în prima descompunere. Cel mai mic multiplu comun va fi $X^2(2X - 1)(2X + 1) = 4X^4 - X^2$

EXERCITII

1) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

a) $X^2 - 1$ și $X^2 - 2$ b) $(X - 1)(X - 2)$ b) $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ și $(X - 1)(X - 3)(X - 4)$ și $(X^2 - 1)(X^2 + 1)^2$

[2)] Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

$$A = (a + b)X + ab \text{ și } B = (a + c)X + ac$$

Scrieți-l în formă canonică

3) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

$$A = X^2 + X + 1 \text{ și } B = X^2 + X + 1$$

$$A = X^2 + X + 1 \text{ și } B = X^2 + X + 1$$

4) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

$$a) 1 - X + 1 + X \text{ și } 1 - X + 1 + X + 2) (X + 2)(X + 2)(X + 2)(X + 2)(X + 2) \text{ și } c) X - 2(X - 2)(X - 2)(X - 2)(X - 2)(X - 2)$$

[5*)] Aflați cel mai mic multiplu comun

$$a) X^2 - 6X + 11 \text{ și } X^2 - 8X + 19 \text{ și } b) X^2 - 1 \text{ și } X^2 - 1$$

TEOREMA LUI BÉZOU

Am întâlnit în lecțiile anterioare unele exemple de polinoame. Putem scrie acum forma generală a unui polinom în funcție de gradul n :

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

$$\text{sau } a_n + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$$

unde coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sînt numere reale, iar $a_n \neq 0$

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5$. Scriindu-l astfel : $P(X) = 2X^3 + (-3)X^2 + 0X + 5$, recunoaștem coeficienții

$$a_3 = 2, a_2 = -3, a_1 = 0, a_0 = 5$$

Se înlocuiește în acest polinom necunoscutul X cu numărul 1, obținem ca rezultat numărul $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 5 = 4$ notăm $P(1)$. Deci $P(1) = 4$

Deci înlocuind necunoscutul X cu numărul $\frac{3}{2}$, obținem ca rezultat numărul $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 5$. Înlocuim $P\left(\frac{3}{2}\right)$. Deci $P\left(\frac{3}{2}\right) = 5$. La fel $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 5 = 9$, $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 0 \cdot (-1) + 5 = 0$

Înlocuind necunoscutul X cu orice număr x obținem ca rezultat numărul $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5$ care se notează $P(x)$. Putem defini o funcție $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $P(x) = P(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Acesta este o funcție polinomială

În general, polinomul

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

determină o funcție polinomială $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită de formula $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Funcțiile liniare, descrise de

$$f(x) = ax + b$$

sînt exemple simple de funcții polinomiale

sunt ecuații pătratică $f(x) = a \cdot x^2 + a \cdot x + a$ sunt ecuații polinomiale.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială, definită de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Orice număr r cu proprietatea că $f(r) = 0$ va fi numit **rădăcină** a polinomului $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. Rădăcinile reale ale acestui polinom sunt tocmai soluțiile ecuației polinomiale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $a_n \neq 0$, se spune că aceasta este o ecuație de gradul al n -lea.

De exemplu, numărul -1 este rădăcină a polinomului $2X^3 - 3X^2 + 5$, cum am văzut. Putem spune că -1 este soluție a ecuației polinomiale de grad al III-lea

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Am văzut că ecuațiile de gradul I:

$$a \cdot x + a_0 = 0, x \in \mathbb{R}$$

(cu $a \neq 0$) au o singură soluție, numărul $-\frac{a_0}{a}$. Deci polinomul de gradul I

$a \cdot X + a_0$ are o singură rădăcină. Polinomul de gradul al II-lea $X^2 + 1$ nu are ca rădăcină reală (de ce?) Se poate arăta că polinomul de gradul al III-lea $2X^3 - 3X^2 + 5$ are ca rădăcină reală doar pe -1 .

Polinoamele, în special sub formă de funcții polinomiale, apar o mulțime de probleme indicate de fizică, chimie, tehnică. De multe ori interesează aflarea rădăcinilor polinoamelor. În acest scop se folosește mult următoarea teorie datorată lui Bezout*:

Teoremă \exists un polinom $Q(X)$ și un număr r astfel încât $P(X) = Q(X) \cdot (X - r) + r$ (binomul $X - r$ îl divide pe $P(X)$).

EXERCİȚIU REZOLVAT

Arătați că polinomul $X^{n+1} - nX^n + (n-1)$ se divide cu $X - 1$ oarecăr $n \in \mathbb{N}$ numărul natural n .

Într-adevăr, înlocuind nedeterminata X cu 1, obținem $1 - n + (n-1) = 0$, deci 1 este rădăcină a polinomului.

EXERCİȚIU REZOLVAT

Care polinom $P(X)$ de gradul al II-lea are valorile $P(-2) = 3$, $P(-1) = 6$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 3$?

Find un polinom de gradul al II-lea îl vom scrie

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0$$

* Bezout, Étienne — matematician francez (1730—1783)

A găsi polinomul ce satisface condițiile date însumare: $a + b + c = 6$ și coeficienților a, b și c .

Condiția $P(-2) = 3$ se scrie $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 3$. La toate celelalte condiții se scriu

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6$$

și

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + c = 3$$

Coeficienții a, b și c formează soluția sistemului de ecuații. Rezolvându-l, obținem $a = -2, b = -3, c = 5$.

EXERCITII

✓ 1) Fie polinomul $P(X) = 2X^4 - X^3 + 3X^2 + 5X + 1$.

a) Calculați valorile $P(-3), P(-2), P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3)$.

b) Calculați $P\left(-\frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{2}\right), P\left(\frac{3}{2}\right)$.

c) Aproximați cu eroare de cel mult 0,01 valoarea $P\left(\frac{1}{2}\right)$ folosind $P(X) = 2X^4 - X^3 + 3X^2 + 5X + 1$. În apropierea $(X = 5X + 1)$, $(X = 2)$, determinați coeficientul k în $P(X) = kX^4 + 5X^3 + 1$ astfel încât $P(X) = 0$.

✓ 3) Care dintre numerele $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ este rădăcină a polinomului

a) $X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3$, b) $4X^4 - X^3 + 4X^2 + X - 1$, c) $X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 4X - 1$.

d) $2X^4 - X^3 + 5X^2 - 5X + X^2$.

4) Alina a scris un polinom de grad 4 al lui k ($P(X) = kX^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1$).

a) $P(-3) = -39, P(0) = 0, P(1) = 2$, b) $P(-1) = 2, P\left(\frac{1}{2}\right) = 1, P(1) = 5$.

$P(-1) = 4, P(1) = 12$.

Fie polinomul în nedeterminatele X și Y :

$$P(X, Y) = 2X^2 + XY + 5Y + 1.$$

Înlocuind nedeterminata X cu numărul 3, iar nedeterminata Y cu numărul -4 , obținem ca rezultat numărul $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) + 1 = -13$, pe care îl notăm $P(3, -4)$. Deci $P(3, -4) = -13$.

Înlocuind nedeterminata X cu un număr x iar pe Y cu numărul y , obținem numărul $2 \cdot x^2 + x \cdot y + 5 \cdot y + 1$, care va fi notat $P(x, y)$. Acest număr este numit **valoarea polinomului P în (x, y)** .

$$\text{Așadar, } P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 = 9, \quad P\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 1 = \frac{17}{2}, \quad P(-4, 3) = 2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 20$$

$$P(-2, 3) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 20 + 3 = 23$$

EXERCITII

1) Aflați valoarea polinomului $Q(X, Y) = 2X - Y^2 + 2$ în :

a) (1, 1) b) (1, 2) c) (-1, 1) d) (1, -2) e) (3, 2) f) (4, 2) g) (-2, 3)

2) Pentru polinomul $P(X, Y) = 5X^2 - XY + Y^2 + X$, calculați :

a) $P(x, 2)$; b) $P(x, -1)$; c) $P(1, y)$ d) $P(-2, y)$

3) Fie polinomul $P(X, Y) = X^2 - 3XY + 2Y - X + 3$. Pentru ce număr y avem $P(3, y) = 0$? Dar $P(3, y) = 9$?

8. FRACTII RAȚIONALE AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA

O fracție rațională este o pereche de polinoame P și Q scrisă astfel:

$$\frac{P}{Q}$$
 Numitorul Q trebuie să fie diferit de polinomul nul 0.

De exemplu, $\frac{2X+1}{3X+1}$, $\frac{X^2}{4}$, $\frac{2X+1}{4}$, $\frac{4Y^2-4X+1}{(3X-1)}$ sînt fracții raționale în nedeterminata X iar $\frac{2X+3}{X+2}$, $\frac{X+1}{Y+1}$, $\frac{X+3}{X-1}$ sînt fracții raționale în nedeterminatele X și Y .

Fracțiile raționale ale căror numitori sînt constante $\neq 0$ sînt de fapt polinoame. De exemplu, fracția $\frac{2X^2+1}{1}$ se identifică cu polinomul $2X^2+1$, fracția $\frac{X+2}{2}$ se identifică cu polinomul $\frac{1}{2}(X+1)$, fracția $\frac{2X+16}{12}$ se identifică cu polinomul $\frac{2}{12}X + \frac{16}{12} = \frac{1}{2}X + \frac{4}{3}$.

Putem amplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu orice polinom $R \neq 0$, ca rezultat obținem fracția rațională $\frac{R \cdot P}{R \cdot Q}$. De exemplu, amplificînd fracția

rațională $\frac{2X+1}{3X+1}$ cu polinomul X^2+X obținem ca rezultat fracția rațională

$$\frac{(X^2+X)(2X+1)}{(X^2+X)(3X+1)} = \frac{2X^3+3X^2+X}{3X^3+3X^2+X-X}$$

Pentru a simplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu un polinom $R \neq 0$, este necesar ca atât numărătorul P cit și numitorul Q să fie divizibile prin R .

De exemplu, fracția rațională $\frac{2X+X}{3X+X}$ poate fi simplificată cu

polinomul $X + 1$ ca rezultat obținem fracția $\frac{2X + 1}{3X + 1}$ fracția $\frac{2X^3 + 3X^2 + X}{3X^3 + 3X^2 + X + 1}$

poate fi simplificată cu X cu $X + 1$ sau cu $X^2 + X$. Obținem pe rând $\frac{2X + 1}{3X + 1}$, $\frac{2X + X}{3X^2 + X}$ respectiv $\frac{2X + 1}{3X + 1}$. Primele două fracții

obținute mai pot fi simplificate: prima cu $X + 1$, a doua cu X , ca rezultat obținem cea de a treia fracție. Aceasta nu mai poate fi simplificată cu polinoame de grad ≥ 1 ; spunem că ea este *irreductibilă*.

Alt exemplu: fracția $\frac{2X}{4X}$ poate fi simplificată cu polinomul $2X + 1$; ca rezultat obținem *polinomul* $\frac{1}{2} X$.

EXERCITII

1) Simplificați fracțiile raționale

a) $\frac{X}{X^2 + 1}$ b) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$ d) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$

2) Simplificați

a) $\frac{9X^2 + 9X}{4X + 4}$ b) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$

d) $\frac{X^2 + 8}{X^2 + X + 2}$ e) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$

3) Simplificați

a) $\frac{3X^2 + 3X}{9X^2 + 9X}$ b) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 1}$

4) Simplificați

a) $\frac{X}{X^2 + 1}$ b) $\frac{X}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X}{X^2 + 1}$

5) Amplificați cu X , apoi cu $X + 1$ fracțiile

a) $\frac{X}{X^2 + 1}$ b) $\frac{X}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X}{X^2 + 1}$

6) Amplificați fracțiile

a) $\frac{X}{X^2 + 1}$ b) $\frac{X}{X^2 + 1}$ c) $\frac{X}{X^2 + 1}$

astfel încât să obținem fracții având același numitor

9 VALORILE UNII FRACȚII RAȚIONALE FUNCTII RAȚIONALE

Fie de exemplu fracția rațională $F(X) = \frac{X-1}{X+1}$. Să înlocuim nedeterminata X cu numărul 2, obținem numărul $\frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ care se notează $F(2)$.
Deci $F(2) = \frac{1}{3}$. Dacă înlocuim nedeterminata X cu numărul $\frac{1}{2}$, obținem ca

rezultat numărul $\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1-2}{2}}{\frac{1+2}{2}} = \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.
Deci $F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$. Se spune că fracția rațională are valoarea $\frac{1}{3}$ în 2 și că are valoarea $-\frac{1}{3}$ în $\frac{1}{2}$. De asemenea, $F(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$.

Însă dacă înlocuim nedeterminata X cu 1 sau cu 0, numitorul fracției anulează. Se spune că fracția rațională F nu are definiția valoarei în 1 sau în 0.

În general, dacă într-o fracție rațională $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ înlocuim nedeterminata X cu un număr real r , pot apărea două cazuri:

Cazul 1: $Q(r) = 0$. În acest caz spunem că fracția rațională F nu are definiția valoarea în r , sau că nu este definită în r .

Cazul 2: $Q(r) \neq 0$. În acest caz fracția rațională F are valoarea $\frac{P(r)}{Q(r)}$ în r .

notăm $F(r) = \frac{P(r)}{Q(r)}$.

De exemplu, pentru a calcula efectiv valoarea $F(r)$ unde $r(X) = \frac{8X^2 + 12X + 1}{(X-1)(X-6)}$, vom scrie $F(X) = \frac{1 + X \cdot (12 + X \cdot 8)}{6 + X \cdot (-7) - X^2}$ și vom folosi

următorul algoritm:

Pasul 0: Citește numărul r . Dacă $r \neq 1$ și $r \neq 6$, continuă cu pasul 1. În caz contrar scrie „excepție”. Stop.

Pasul 1: $a = r \cdot 8$;

Pasul 2: $b = 12 + a$;

Pasul 3: $c = r \cdot b$;

Pasul 4: numărător = $1 + c$;

Pasul 5: $d = 6 - r$;

Pasul 6: $e = r \cdot d$;

Pasul 7: numitor = $6 + e$;

Pasul 8: $F(r) = \frac{\text{numărător}}{\text{numitor}}$;

Pasul 9: Scrie rezultatul $F(r)$. Stop.

Fie fracția $\frac{x+1}{3x+2}$. Numitorul are două rădăcini anume 1 și 2.

Pentru orice număr real x diferit de 1 și de 2, fracția are valoare în \mathbb{R} și anume

$\frac{x+1}{3x+2}$. Putem defini o funcție $h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $h(x) = \frac{x+1}{3x+2}$.

aceasta este o funcție rațională

În general, fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ o fracție rațională. Să notăm cu M mulțimea rădăcinilor reale ale numitorului $Q(x)$. Putem defini o funcție $f: \mathbb{R} \setminus M \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. O astfel de funcție se numește funcție rațională.

Astfel, funcțiile $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{3x^2+1}{x-1}$ și $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

sînt exemple de funcții raționale.

Și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este o

funcție rațională.

Studierea funcțiilor raționale va fi făcută în lucru.

EXERCITII

1) Calculați valoarea fracțiilor raționale de mai jos în

a) $\frac{x-4}{x-6}$ b) $\frac{2x}{x-3}$ c) $\frac{3x-5}{x-3x}$ d) $\frac{x-5x}{x-2}$ e) $\frac{3x}{x-2}$ f) $\frac{5}{x-2}$

2) Pentru ce numere a , fracția rațională

a) $\frac{2x-3}{x-1}$ b) $\frac{5}{x^2+1}$ c) $\frac{4x-3}{x-2}$ d) $\frac{3x-17}{3x+15}$ e) $\frac{12x-4}{9x}$ f) $\frac{5}{x-2}$

are valoarea în a ?

3) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii $f(a)$ dacă $f(x)$ este fracția

a) $\frac{x+1}{x-2}$ b) $\frac{x^2-2x+2}{x-4}$ c) $\frac{5x-3x-1}{x-1}$

10. OPERAȚII CU FRACȚII RAȚIONALE

Priviți circuitul electric desenat în figura 1. doi rezistori avînd aceeași rezistență R au fost legați în paralel cu rezistori de $1 \text{ k}\Omega$ respectiv $2 \text{ k}\Omega$ iar cele două celule obținute au fost legate în serie. Care este rezistența totală a circuitului?

Cunoscînd formulele de calcul ale rezistențelor, vom putea afla rezistența primei celule $\frac{R}{R+1} \text{ k}\Omega$ (am presupus că și rezistența R este exprimată în $\text{k}\Omega$).

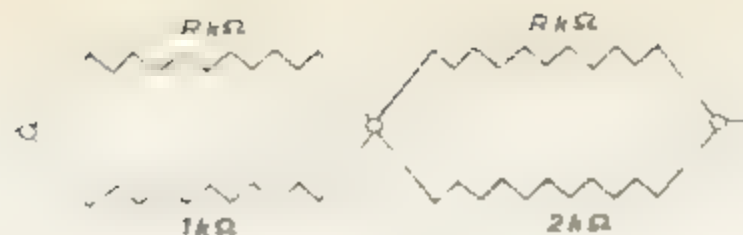


Fig. III.1

totală) Rezistența celei de-a doua celule este $\frac{2R}{R+1}$ kΩ. Deci rezistența totală a circuitului este de $\frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2}$. Adunând la același numitor putem să scriem :

$$\frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2} = \frac{R(R+2) + 2R(R+1)}{(R+1)(R+2)} = \frac{3R^2 + 4R}{R^2 + 3R + 2}$$

Avem un exemplu de divizie a două fracții raționale (în nedeterminata R)

În fracție rațională nedeterminată x reprezintă de obicei numere reale chiar și fracție reprezintă numere reale, de aceea este natural să definim operații cu fracții raționale, care să extindă operațiile cu numere: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea.

De exemplu pentru a aduna două fracții raționale $\frac{2x-1}{x}$ și $\frac{5x-2}{x}$ (ca să vedem a nu același numitor) vom proceda astfel:

$$\frac{2x-1}{x} + \frac{5x-2}{x} = \frac{(2x-1) + (5x-2)}{x} = \frac{7x-3}{x}$$

La fel,

$$\frac{x}{x+1} - \frac{4x+1}{x+1} = \frac{x - (4x+1)}{x+1} = \frac{-3x-1}{x+1}$$

$$\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{(3x-1) + (x-2)}{x+1} = \frac{4x-3}{x+1}$$

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x-2) - x}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

Să observăm că putem simplifica ultima fracție cu $x+1$ ca rezultat obținem

$\frac{-2}{x+1}$. Așadar, putem spune că suma fracțiilor $\frac{x}{x+1}$ și $\frac{x}{x+1}$, după simplificare, este $\frac{-2}{x+1}$. Se observă că se scrie

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

EXERCITII

1) Adunați fracțiile următoare:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} & \text{b) } \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{3x-4}{11} + \frac{5x}{11} \\ \text{d) } \frac{x^2-2}{x-1} + \frac{2x-3}{x+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e) } \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x+1} \\ \text{f) } \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{2x-3}{x+1} \end{array}$$

2) Efectuați adunările simplificând rezultatele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x+2} & \text{b) } \frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{2x}{(x-1)(x+3)} + \\ \frac{1}{(x-1)(x+3)} : \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d) } \frac{1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+1} \\ \text{e) } \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} \end{array}$$

În general, dacă $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R}{Q}$ sint două fracții raționale cu același numitor, definim suma lor astfel: $\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$

Pentru a aduna două fracții raționale cu numitori diferiți, le vom aduce mai întâi la același numitor, prin amplificare convenabilă, apoi le vom aplica regula de mai sus.

De exemplu, fie fracțiile $\frac{x}{x-1}$ și $\frac{1}{x}$. Pentru a le aduna, le vom aduce mai întâi la același numitor, amplificându-le cu x respectiv cu $x-1$:

$$\frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{x^2 + (x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x}$$

Alt exemplu. Pentru a aduna fracțiile $\frac{x}{(x-1)^2}$ și $\frac{3}{x^2-1}$, să observăm că cel mai mic multiplu comun al numitorilor lor este $(x-1)^2(x+1)$. Astfel, pentru a le aduce la același numitor, le vom amplifica cu $x+1$ respectiv cu $x-1$:

$$\begin{aligned} \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} &= \frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{3x-3}{(x-1)^2(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+3x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+4x-3}{x^3-x^2+x-1} \end{aligned}$$

Să adunăm fracțiile $\frac{x}{x+1}$ și $\frac{1}{x-1}$. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este produsul lor: $(x+1)(x-1) = x^2-1$. Vom proceda astfel:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{x(x-1)}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-1} \\ &= \frac{(x^2-x) + (x+1)}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Să adunăm polinomul $2X + 5$ cu fracția rațională $\frac{3X}{X-1}$. Polinomul poate fi scris ca fracție rațională cu numitorul 1. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este chiar numitorul fracției. Vom proceda astfel:

$$X^{-1}(2X + 5) + \frac{3X^0}{X-1} = \frac{(X-1)(2X+5) + 3X^0}{X-1} = \frac{5X + 3X - 5}{X-1}$$

De regulă, rezultatul adunării a două fracții raționale trebuie simplificat pe cât posibil. Prețurăm, din motive evidente, scrierea lui sub forma unei fracții nededucibile (însă aceasta este, în general, dificil de realizat).

Astfel, să luăm ca exemplu fracțiile raționale $\frac{X+2}{X^2+X}$ și $\frac{1}{X+1}$. Adunându-le, obținem:

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{(X+2) + X}{X(X+1)} = \frac{2X+2}{X(X+1)}.$$

Rezultatul obținut poate fi simplificat cu $X+1$, se obișnuiește să se scrie:

$$\frac{X+2}{X+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{2}{X}.$$

Alt exemplu. Să luăm fracțiile raționale

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^3 - X^2} \quad \text{și} \quad \frac{3X+1}{X^2 + X + X}.$$

Adunându-le (observând că cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^3 - X^2 = X^2(X-1)(X^2+X+1)$), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^3 - X^2} + \frac{3X+1}{X^2 + X + X} &= \frac{(X^3 - 3X^2 + 2X) + (3X + 1)(X - 1)}{X^3 - X^2} \\ &= \frac{(X^3 - 3X^2 + 2X) + (3X^2 - 2X - 1)}{X^3 - X^2} = \frac{X^3 - 1}{X^3 - X^2} \end{aligned}$$

Putem simplifica rezultatul obținut cu $X^2 - 1$ (vom scrie

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^3 - X^2} + \frac{3X+1}{X^2 + X + X} = \frac{1}{X}.$$

Observație. Am fi putut evita o serie de calcule dacă ne fi obținut de la început rezultatul $\frac{1}{X}$. $\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^3 - X^2}$ poate fi simplificată cu $X-1$ și obținem $\frac{X^2 - 2X + 2}{X^2 + X}$. Dacă, încă, adunăm fracția rațională este bine să verificăm dacă $X-1$ divide $X^2 - 2X + 2$ și $X^2 + X$ (reducibile, eventual să le simplificăm).

Alte exemple. Să efectuăm: $\frac{5}{3X^2} + \frac{2X}{X+1}$ și $\frac{X}{1} + \frac{1}{X+1}$.

Avem

$$\frac{5}{3X} + \frac{2X}{X+1} = \frac{5X+5}{(X+1) \cdot 3X} + \frac{6X}{3X(X+1)} = \frac{11X+5}{3X+3X}.$$

$$1 - \frac{X}{X^2} + \frac{1}{X+1} = \frac{(X^2+X)+(1-X^2)}{(1-X)(X+1)} =$$

$$= \frac{X+1}{(1-X)(X+1)} = \frac{1}{1-X}.$$

Să se observe că cel mai mic multiplu comun al numitorilor $1-X^2$ și $X+1$ este $1-X=(1-X)(1+X)$.

$$\frac{X}{1-X^2} + \frac{1}{X+1} = \frac{X+(1-X)}{1-X^2} = \frac{1}{1-X^2}.$$

atunci suma lor este fracția rațională

$$Q \cdot S$$

Adunarea fracțiilor raționale are aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale: este comutativă și asociativă. Putem astfel să adunăm trei sau mai multe fracții raționale indiferent în ce ordine.

EXERCITIUL REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale $\frac{X+1}{X-1}$, $\frac{X-1}{X+1}$ și $\frac{7X^2-18X+7}{X-1}$.

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^2-1=(X+1) \cdot (X-1)$. Pentru a aduce toate cele trei fracții la același numitor vom amplifica prima cu $X+1$, iar a doua cu $X-1$. Obținem astfel:

$$\frac{X+1}{X-1} = \frac{(X+1)(X+1)}{(X-1)(X+1)} = \frac{X^2+2X+1}{X^2-1}$$

$$\frac{X-1}{X+1} = \frac{(X-1)(X-1)}{(X+1)(X-1)} = \frac{X^2-2X+1}{X^2-1}$$

$$\frac{7X^2-18X+7}{X-1} = \frac{(7X^2-18X+7)(X+1)}{(X-1)(X+1)} = \frac{7X^3-11X^2-11X+7}{X^2-1}$$

$$\frac{X^2+2X+1}{X^2-1} + \frac{X^2-2X+1}{X^2-1} + \frac{7X^3-11X^2-11X+7}{X^2-1} =$$

$$\frac{9X^3-18X+9}{X^2-1} = \frac{9(X-1)^2}{X^2-1} = \frac{9X-9}{X+1}$$

EXERCİȚIU REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale $\frac{3X^2 + Y^2}{(X - Y)(X + Y)}$ și $\frac{-2X}{X + Y}$

Pentru a aduce fracțiile la același numitor, va trebui să amplificăm a doua cu $X - Y$. Deci:

$$\frac{3X^2 + Y^2}{(X - Y)(X + Y)} + \frac{-2X}{X + Y} = \frac{3X^2 + Y^2 - 2X^2 - 2XY}{(X - Y)(X + Y)}$$

$$\frac{X^2 - 2XY + Y^2}{(X - Y)(X + Y)} = \left(\frac{Y - X}{X + Y} \right)^2$$

De ce creștem că am scris rezultatul ca pătrat și nu astfel:

$$\frac{X^2 - 2XY + Y^2}{(X - Y)(X + Y)}$$

EXERCİȚII

1) Aduceți la același numitor fracțiile, simplificându-le în prealabil

a) $\frac{2X + 3Y}{X + Y} + \frac{4X + 4}{X + Y}$; b) $\frac{X + 6}{3X + 12X - 1}$; c) $\frac{4}{9X^2 - 1} + \frac{6X}{X^2 - 6X}$; d) $\frac{X + 1}{X^2 - 6X} + \frac{2X - 6X}{X^2 - 6X}$

2) Simplificați

a) $\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} + \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$; b) $\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} + \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$; c) $\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} + \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$; d) $\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} + \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$

3) Efectuați adunările

a) $\frac{1}{X + Y} + \frac{1}{X - Y}$; b) $\frac{1}{X + 2Y} + \frac{1}{X - 2Y}$; c) $\frac{1}{X + 2Y} + \frac{4X}{2X + Y}$

4) Efectuați adunările, simplificând (dacă este posibil) rezultatul

a) $\frac{1}{X + Y} + \frac{1}{X - Y}$; b) $\frac{1}{X + Y} + \frac{1}{X - Y}$; c) $\frac{X + Y}{X^2 - Y^2} + \frac{Y}{2X + 2Y} + \frac{X}{X^2 - Y^2}$; d) $\frac{1}{X - 2} + \frac{2}{X - 2Y} + \frac{1}{X - Y}$

$$c) \quad a) \quad \frac{X+3}{X(X-1)} + \frac{X+2}{X(X-1)} + \frac{X+1}{X(X-1)} = \quad b) \quad \frac{YZ}{X(X-1)} + \frac{YZ}{X(X-1)} + \frac{YZ}{X(X-1)}$$

$$b) \quad \frac{XZ}{X(X-1)} + \frac{XZ}{X(X-1)} + \frac{XZ}{X(X-1)} = \quad d) \quad \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X}$$

5) Efectuați adunările

$$a) \quad \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X}$$

6) Fie fracțiile

$$F(X) = \frac{X}{X-1} + \frac{1}{2X} + G(X) = \frac{3X-2}{X+2X} + H(X) = \frac{4X-3}{X-4}$$

Calculați $I(X) = F(X) + G(X)$, $J(X) = 2G(X) + H(X)$, $K(X) = F(X) + 3G(X) + 2H(X)$

7) Efectuați adunările:

$$a) \quad \frac{X+1}{X(X-1)} + \frac{X+2}{X(X-1)} = \quad b) \quad \frac{X-4}{X(X-1)} + \frac{X-9}{X(X-1)}$$

Opusa fracției raționale $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ este fracția rațională $-F(X) = \frac{-P(X)}{Q(X)}$

care se notează $-F$. Scăderea fracțiilor raționale se desfășoară cu ajutorul adunării, prin:

$$G - F = G + (-F)$$

De exemplu, dacă vrem să scădem fracția rațională $\frac{3X-4}{X-1}$ din fracția $\frac{7}{X+1}$, vom proceda astfel:

$$\frac{7}{X+1} - \frac{3X-4}{X-1} = \frac{7}{X+1} + \frac{3X-4}{X-1} = \frac{7(X-1) + (3X-4)}{X-1} = \frac{10X-11}{X-1}$$

Practic vom proceda ca și în cazul adunării:

$$\frac{7}{X+1} - \frac{3X-4}{X-1} = \frac{7(X-1) + (3X-4)}{X-1} = \frac{10X-11}{X-1}$$

Observăm că opusul lui $\frac{3X-4}{X-1}$ este $\frac{3X-4}{X-1}$

De asemenea, observăm că prin înmulțirea cu $\frac{X-1}{X-1}$ obținem $\frac{7(X-1)}{X-1} = \frac{7X-7}{X-1}$

EXERCITII

1) Efectuați

$$a) \quad \frac{1}{X} + \frac{4}{X} = \quad b) \quad \frac{5X}{X} + \frac{2X}{X-1} = \frac{2X-1}{X} + \frac{2X}{X} = \quad d) \quad \frac{1}{X} + \frac{1}{X}$$

$$\frac{2X}{X^2 + 2X + 1} : \text{ e) } \frac{3X + 7}{X^2 - 3X} \cdot \frac{X + 2}{X^2 - 9} : \text{ f) } \frac{1}{(X - 2)^2} \cdot \frac{X}{(X - 3)^2}$$

2) Efectuați, simplificând pe cât posibil rezultatul

$$\text{a) } \frac{1}{X} + \frac{2}{X - 1} - \frac{3X + 3}{X - 1} : \text{ b) } \frac{3 + 2X}{X - 2} \cdot \frac{3X - 2}{X + 2} + \frac{X - 16X}{X - 4} : \text{ c) } \frac{X}{2X - 1} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{7}{X - 1} - \frac{20X - 4}{4X - 1} : \text{ d) } \frac{2}{X + 3} + \frac{1}{X + 1} - \frac{X}{(1 - X)(X + 3)^2} : \text{ e) } \frac{X}{X^2 + 1}$$

$$\frac{X}{X^2 - 1} - \frac{1}{X - 1}$$

$$\frac{X}{X^2 - 1} - \frac{1}{X - 1}$$

$$\text{3) Efectuați fracțiile raționale } R(X) = \frac{2X - 1}{X^2 - 2X} + G(X) = \frac{3X - 2}{X^2 - 2X} \text{ și } H(X) = \frac{4X - 3}{X^2 - 4}$$

Calculați fracțiile raționale $(1X) = H(X) + G(X)$, $H(X) - G(X)$, $H(X) \cdot G(X)$, $H(X) : G(X)$, $H(X) - G(X) : H(X)$, $H(X) : G(X)$. Calculați apoi fracția $F(X) = G(X) - H(X) : G(X) - H(X)$. ~~Procedee~~ Procedeul este

4) Efectuați :

$$\text{a) } \frac{X}{X + 3} + \frac{X}{X - 3} - \frac{2X}{X - 9} : \text{ b) } \frac{1X}{(X - 2)^2} - \frac{2X + 2}{(X + 3)(X - 2)^2} - \frac{5}{X + 3}$$

$$\text{c) } \frac{X + 3}{X - 2} + \frac{X + 2}{X - 1} - \frac{X - 1}{X + 2} : \text{ d) } \frac{X + 1}{(X + 2)(2X + 3X)} - \frac{(3X + 36)}{(X + 2)(X - 4)}$$

$$\text{e) } \frac{(X - 3)^2}{X^2} + \frac{(1 - 2)^2}{2^2} + \frac{(X - 2)^2}{X^2} - 4$$

Produsul a două fracții raționale $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R}{S}$ este, prin definiție, fracția rațională $\frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$$

Observăm că numărătorul produsului este produsul numărătorilor iar numitorul produsului este produsul numitorilor fracțiilor.

De exemplu, să calculăm produsul fracțiilor $\frac{X - 4}{X}$ și $\frac{2X}{X + 2}$

$$\frac{X - 4}{X} \cdot \frac{2X}{X + 2} = \frac{(X - 4) \cdot 2X}{X(X + 2)} = \frac{2X - 8X}{X - 2X}$$

Se obișnuiește să se simplifice (pe cât posibil) rezultatul ; în acest exemplu putem simplifica cu X ($X + 2) = X + 2X$ și putem scrie :

$$\frac{X - 4}{X} \cdot \frac{2X}{X + 2} = \frac{2X - 4}{X - 2}$$

Simplificarea poate fi făcută chiar de la început după ce am descompus în factori numărătorii și numitorii. Orice factor care apare într-unul dintre numărători și într-unul dintre numitori poate fi simplificat

Luând din nou exemplul de mai sus, să descompunem numărătorii și numitorii în factori:

$$\frac{X^2 - 4}{X^2 + 2X} = \frac{(X+2)(X-2)}{X(X+2)} = \frac{X-2}{X}$$

Observăm că $X+2$ apare ca factor la numitor și la numărător, la fel $X+2$ îl simplificăm; rămâne $\frac{X-2}{X}$, adică $\frac{2X-4}{X}$.

Pentru a efectua produsul fracțiilor raționale $\frac{X-2}{X}$ și $\frac{X}{X+1}$, observăm că X poate fi simplificat:

$$\frac{X-2}{X} \cdot \frac{X}{X+1} = \frac{X-2}{1} \cdot \frac{X}{X+1} = \frac{X^2 - 2X}{X+1}$$

III exemplu Să înmulțim fracția $\frac{X+1}{X^2+X+1}$ cu fracția $\frac{X+1}{X}$. Descompunem în factori numitorii și numărătorii: cele două fracții se scriu:

$$\frac{(X+1)(X^2+X+1)}{(X-1)(X^2+X+1)} \cdot \frac{X+1}{X(X-1)}$$

Observăm că X^2+X+1 și $X-1$ apar ca factori la un numărător și la un numitor, îi simplificăm și scriem:

$$\frac{X+1}{X^2+2X+1} \cdot \frac{X+1}{X^2-X} = \frac{(X+1)(X+1)}{(X+1)^2} \cdot \frac{X+1}{X(X-1)}$$

$$\frac{X+1}{X+1} \cdot \frac{X+1}{X(X-1)}$$

Să înmulțim polinomul X^2+2X+1 cu fracția $\frac{X+1}{X(X-1)}$. Vom scrie polinomul ca fracție rațională cu numitorul 1: $\frac{X^2+2X+1}{1}$. Observăm că putem simplifica factorul $X-1$:

$$\frac{X^2+2X+1}{1} \cdot \frac{X+1}{X(X-1)} = \frac{X+1}{X} \cdot \frac{X+1}{X}$$

Să efectuăm produsul fracțiilor raționale $\frac{X+1}{X}$ și $\frac{X+1}{X}$.

Observăm că putem simplifica factorii $X-1$ și $X+1$ (o singură dată!). Așadar

$$\frac{X+1}{X} \cdot \frac{X+1}{X} = \frac{(X+1)(X+1)}{X \cdot X} = \frac{1}{X+Y} \cdot \frac{X+2}{Y} \cdot \frac{1}{X} = \frac{1 \cdot (X+2) \cdot 1}{(X+Y) \cdot Y \cdot X}$$

$$\frac{X+2}{X(Y+X)}$$

Inversa fracției raționale $\frac{R}{S}$ este fracția rațională $\frac{S}{R}$ (presupunând că polinomul R este diferit de polinomul 0). Într-adevăr, după simplificarea cu $R \cdot S$, avem : $\frac{R}{S} \cdot \frac{S}{R} = \frac{R \cdot S}{S \cdot R} = \frac{1}{1} = 1$.

Împărțirea fracțiilor raționale se definește cu ajutorul înmulțirii astfel :

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R}$$

Cîmul unei fracții raționale prin alta se obține înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Rețineți și formula :

De exemplu, să împărțim fracția rațională $\frac{X^2 - 2X}{X + 1}$ la fracția $\frac{X + 3}{3X + 2}$.

Procedăm astfel :

$$\frac{X^2 - 2X}{X + 1} : \frac{X + 3}{3X + 2} = \frac{X^2 - 2X}{X + 1} \cdot \frac{3X + 2}{X + 3} = \frac{(X^2 - 2X)(3X + 2)}{(X + 1)(X + 3)}$$

(am simplificat cu $X + 2$)

$$(X + 3)(X + 1)$$

Să scriem cîmul $\frac{9X^2 - 4}{(X + 3)(3X + 2)}$ ca fracție rațională. Folosind for-

mula, îl putem înlocui cu $\frac{(X + 3)(2X + 1) + (3X + 2)}{(X + 3)(3X + 2)}$. Simplificînd cu

$X + 3$ și cu $3X + 2$, obținem $\frac{2X + 1}{3X + 2}$. Putem scrie :

$$\frac{(X + 3)(2X + 1)}{(X + 3)(3X + 2)} = \frac{2X + 1}{3X + 2}$$

EXERCITII

1) Efectuați înmulțirile de mai jos, scrieți mai întâi polinoamele ca fracții cu numitorul 1.

a) $X^2 \cdot \frac{3}{X}$; b) $(X^2 - 2X + 1) \cdot \frac{5}{X^2 - 1}$; c) $X^2 \cdot \frac{2}{X^2}$; d) $(X^2 + 4X + 4) \cdot \frac{1}{X^2 - 4}$

2) Efectuați :

a) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \cdot \frac{4x}{x^2 - 1}$

[3] Efectuați următoarele

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 1}$ d) $\frac{x(x^2 - 1)}{5x^2}$
 e) $\frac{x^2 - 1}{9x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ f) $\frac{(x^2 + 2)^2 - 4x^2}{16x^2 - 25} \cdot \frac{4x^2 - 5}{9x^2 + 6}$

[4] Efectuați următoarele

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ e) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ f) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 g) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

5) Efectuați următoarele

a) $\frac{1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ d) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 12} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 e) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ f) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ g) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

6) Scrieți ca fracție rațională

a) $\frac{x^2 - 81}{9x^2 - 4}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

[5] Efectuați

a) $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$ b) $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$
 c) $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$ d) $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$
 e) $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$

[6] Efectuați

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

LUCRARI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOSTINȚE ȘI DEPRINDERI DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Efectuați:

a) $(3x^2 - 6x + 2) + (3x^2 + 2x - 4)$; b) $(5x^2 - 4x + 3) - (2x^2 - 5x + 4)$; c) $(8x - 7 + 3) \cdot (5x^2 - 7)$
 d) $(x^6 - 3x^4 - 4x^3 + 6x + 4) : (x^3 - 3x - 2)$

2) Descompuneți în factori:

a) $16x^2 - 4$; b) $3x^2 + 6x' + 3x'$; c) $8x^2 - 1^2$; d) $x^4 - x^2 + 8x - 8$

3) Arătați că polinomul $x^2 - 3$ divide polinomul $x^3 - 8x - 3$

4) Arătați că: a) $n + 1 < 1 < n + 2$; b) $n < n + 1 < n + 2$; c) $n + 1 < n + 2 < n + 3$; d) $n + 1 < n + 2 < n + 3$

LUCRAREA A II-A

1) Simplificați fracțiile raționale:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$; b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$; c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$; d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

2) Efectuați:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$; b) $2x - 1 + \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$; c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

3) Ce fracție rațională poate fi scrisă în locul semnului "...", astfel încât:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$; b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$

4) Efectuați:

$\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

CAPITOLUL IV

ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA

8

1. PREZENTARE

Multe probleme practice se pot rezolva folosind ecuații. De exemplu, presupunem că un arhitect vrea să proiecteze o cameră de 15 m² fiindcă lățimea camerei să fie cu 2 metri mai mare decât lățimea.

Dacă notăm cu x lățimea camerei (măsurată în metri) și cu y lungimea camerei este $y = 2 + x$ iar aria camerei este $xy = 15$. Putem rezolva problema arhitectului, dacă reușim să rezolvăm ecuația :

$$(x + 2) \cdot x = 15 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Acastă ecuație este echivalentă cu ecuația :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

care este o ecuație de gradul al II-lea. O soluție a ei este evident numărul $x = 3$. Dar ecuația mai are încă o soluție, numărul $x = -5$ (verificăm!).

Arhitectul își rezolvă problema dacă proiectează camera având lungimea de 5 metri și lățimea de 3 metri. Aceasta este dar soluția corectă acceptată pentru arhitect ?

DEFINIȚIE

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

cu a, b, c numere reale. Putem presupune de la început că $a \neq 0$ și că pentru $a = 0$ obținem o ecuație liniară (de gradul I).

Se notăm $P(X) = AX^2 + BX + C$, aceasta este un polinom în X de gradul al II-lea de aici provine și numele ecuației. Soluțiile ecuației se mai numesc și rădăcini ale polinomului.

De exemplu, 7 este soluție a ecuației $x^2 - 16x + 63 = 0$ deoarece este adevărat că $7^2 - 16 \cdot 7 + 63 = 0$. Numim $P(X) = X^2 - 16X + 63$ constatăm că $P(7) = 0$, deci 7 este rădăcina a polinomului $P(X)$. 8 este rădăcina ? Dar 9

EXERCİTIU REZOLVAT

Pentru ce valori ale lui m și n ecuația $x^2 - mx + n = 0$ admite soluțiile 4 și -3?

Deoarece 4 este soluție a ecuației, înlocuind necunoscuta x cu 4 obținem propoziția adevărată $4^2 - m + 4 - n = 0$. La fel, din faptul că -3 este soluție obținem propoziția adevărată: $(-3)^2 + m - (-3) + n = 0$.

Deci m și n sînt soluții ale sistemului:

$$16 - 4m + n = 0$$

$$9 + 3m + n = 0$$

Obținem $m = -1$ și $n = 12$.

Dacă notăm $P(x) = x^2 - mx + n$ faptul că 4 și -3 sînt rădăcini ale polinomului $P(x)$ se exprimă prin condițiile $P(4) = 0$ și $P(-3) = 0$, care conduc la sistemul de ecuații de mai sus.

EXERCİTII

1) Formează ecuațiile de gradul al II-lea care au ca rădăcini a și b (așa în tabelul de mai jos) mai fiind este completă, cîm $a = 0$. Verifică, pentru fiecare din ecuații, dacă are soluții din mulțimea

a	b		Ecuație
2	9	7	$x^2 - 9x + 7 = 0$
4	0	1	
5	17	0	
1	3	3	
1	0	5	
6	0	0	
1	4	0	

$\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ este soluție

2) Precizează coeficienții a , b , c pentru ecuațiile date:

- a) $2x^2 - 20x + \dots = 0$,
 b) $x^2 - x + 1 = 0$, c) $2x^2 + 15 = 0$
 d) $x^2 = 0$, e) $-x + 4x = 0$, f) $9x = 0$
 g) $x^2 - x + 1 = 0$, h) $x^2 - 5x + 5 = 0$, i) $(m + 1)x^2 + 2mx + 3(m + 2) = 0$

3) Dintre următoarele ecuații care sînt echivalente ecuația de gradul al II-lea

- a) $(x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x + 3)$, b) $x(x + 2)(x + 3) = x(x + 1)(x + 4)$,
 c) $(2x - 1)(4x + 2x + 1) = 8x(x + 2x + 1)$, d) $(1 - 2 + x^2 + 1) + (1 - 2 - x - 1) = 0$

4) Este 5 o soluție a ecuației $x^2 - 4x - 5 = 0$? $12x - 5 = 0$ Este 1 o rădăcină a polinomului $\lambda^2 - 2\lambda - 1$? Dar 1 + $\sqrt{2}$?

5) a) Află rădăcinile lui m știind că 1 este soluție a ecuației

$$5x^2 - mx^2 - q = 0$$

b) Pentru ce valori ale parametrului ecuația $px^2 - 5x - 4p = 0$ are soluția 2?

2. REZOLVARE A ECUAȚIILOR DE GRADUL AL II-LEA CAZURI SPECIALE

De exemplu, să rezolvăm ecuația :

$$x^2 - 6x = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Constatăm imediat, prin înlocuire directă, că numărul 0 este soluție a ecuației.

Să presupunem că numărul real x este soluție a ecuației ; atunci, dacă înlocuim necunoscuta x cu x obținem propoziția adevărată $x^2 - 6x = 0$, sau $x^2 = 6x$.

Distingem două cazuri :

— soluția x este 0 ;

— $x \neq 0$: în acest caz, împărțind ambii membri cu x obținem $x = 6$. Deoarece $6^2 - 6 \cdot 6 = 0$, ecuația are două soluții : 0 și 6.

Să considerăm polinomul $P(X) = X^2 - 6X$. Știm că rădăcinile sale sînt 0 și 6. Dacă-l descompunem în factori : $P(X) = X(X - 6)$, observăm că cei doi factori sînt de forma $X - x$ unde x este rădăcină a polinomului.

Alt exemplu : ecuația $(x - 1)(x + 15) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Înlocuind necunoscuta x prin numărul x , presupunînd că acesta este soluție obținem $(x - 1)(x + 15) = 0$. Dacă $x \neq 1$, împărțim ambii membri cu $x - 1$ și obținem $x + 15 = 0$ adică $x = -15$. Ecuația are două soluții, 1 și -15 (verificați că sînt soluții!).

Polinomul $P(X) = (X - 1)(X + 15)$ este deja descompus în factori. Observați legătura între factori și rădăcinile sale !

Pentru a rezolva ecuația $2x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, se obișnuiește să se procedeze astfel :

— se descompune în factori : $x(2x + 3) = 0$;

— fiecare factor ne dă o soluție : din $x = 0$ obținem soluția 0, din $2x + 3 = 0$, obținem soluția $-\frac{3}{2}$.

EXERCITII

1) Rezolvați ecuațiile (presupunem $x \in \mathbb{R}$)

a) $x^2 = 4x$, b) $x^2 = 3x$, c) $4x^2 = x$; d) $2x^2 = -7x$

2) Rezolvați ecuațiile

a) $x^2 - 3x = 0$, b) $x^2 + 3x = 0$, c) $2x^2 - 6x = 0$, d) $2x^2 + 6x = 0$, e) $7x^2 - x = 0$, f) $5x^2 + 7x = 0$,
g) $0,6x^2 - 3,6x = 0$.

3) Rezolvați ecuațiile

a) $x(x + 8) = 0$, b) $(x + 1)(x - 2) = 0$, c) $(x + 2)(x - 3) = 0$, d) $(2x - 5)(5x - 2) = 0$,
e) $(3x - 8)(2x - 13) = 0$.

Am rezolvat ecuații de gradul al II-lea de forma $ax^2 + bx = 0$ (deci în care lipsește termenul liber). Vom rezolva acum ecuații în care $b \neq 0$, deci de forma $ax^2 + bx + c = 0$.

De exemplu, să rezolvăm ecuația

$$x^2 + 81 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Căc de obicei presupunem că numărul x este soluție a ecuației, să înlocuim necunoscuta x cu numărul -9 (câtinec propoziția adevărată $x^2 + 81 = 0$, pe care o putem scrie astfel $(x + 9)(x - 9) = 0$).

Distingem două cazuri :

1) $x = -9$,

2) $x = 9$, deoarece $x = 9 \neq 0$ împarțind ambii membri cu $x - 9$ obținem $x + 9 = 0$ deci $x = -9$

Așit -9 și 9 sînt soluții ale ecuației

Să observăm că polinomul $P(X) = X^2 + 81$ se descompune în factori astfel $P(X) = (X + 9)(X - 9)$, factorul $X + 9$ ne da soluția -9 , iar factorul $X - 9$ ne da soluția 9

Alt exemplu : să aflăm soluțiile ecuației $5x^3 - 3 = 0$

Polinomul $P(X) = 5X^3 - 3$ se descompune în factori astfel

$$P(X) = 5 \left(X - \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right) \left(X + 1 + \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right) \left(X - 1 + \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right)$$

Deci ecuația are soluțiile $-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ și $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$.

Să rezolvăm acum ecuația :

$$6x^2 + 11 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Pentru orice număr real x avem $x^2 \geq 0$, deci $6x^2 \geq 0$ de unde rezultă că $6x^2 + 11 \geq 11 > 0$. Așadar, dacă înlocuim necunoscuta x prin numărul x propoziția $6x^2 + 11 = 0$ este falsă cîcîc ar fi x . Ecuația dată nu are nici o soluție

EXERCITII

1) Rezolvați ecuațiile

- a) $x^2 - 1 = 0$, b) $4x^2 - 1 = 0$, c) $x^2 + 9 = 0$, d) $2x^2 - 8 = 0$, e) $x^2 + 1 = 0$, f) $4x^2 - 0,05 = 0$, g) $x^2 - 8 = 0$, h) $x^2 + 2 = 0$

[2] Rezolvați ecuațiile

- a) $2x^2 - 3 = 0$, b) $12x^2 - 22 = 0$, c) $4x^2 - 0,5 = 0$, d) $144x^2 = 1$, e) $49x^2 = (15 + 1)$, f) $2x^2 - (1 + 12) = 0$

Exemplele de mai sus ne arată că ecuația de gradul al II-lea $ax^2 + bx + c = 0$ în cazurile $b = 0$ sau $c = 0$ se rezolvă simplu prin descompunere în factori . Rezolvarea ecuației prin descompunerea trinomului în factori este posibilă și în alte cazuri

De exemplu, să rezolvăm ecuația ,

$$4x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Descompunem în factori polinomul $P(X) = 4X^2 - 4X + 1$ astfel $P(X) = (2X + 1)(2X - 1)$ sau $P(X) = (2X - 1)(2X + 1)$. Arundând factorii ne putem pune aceeași rădăcină a polinomului, anume $\frac{1}{2}$. Ecuația are deci o singură soluție, care se obișnuiește să se spună că polinomul are rădăcina *dubă*.

Alt exemplu Fie ecuația $x^2 - 2x - 3 = 0$. Vom descompune în factori trinomiul $X^2 + 2X - 3$, scoțind în evidență un pătrat perfect: $X^2 + 2X - 3 = X^2 + 2X + 1 - 4 = (X + 1)^2 - (X + 1 - 2)(X + 1 + 2) = (X + 1 - 2)(X + 1 + 2) = (X - 3)(X + 1)$. Așadar ecuația are două soluții: -3 și -1 .

Scoțind în evidență un pătrat perfect, ecuația $x^2 - 2x - 40 = 0$ poate fi înlocuită cu ecuația echivalentă :

$$(x - 1)^2 + 39 = 0$$

Observăm că ecuația nu are nici o soluție.

Ecuația $x^2 - (1/2 + 1/3)x + 1/6 = 0$ se rezolvă observând că trinomiul din membrul sting poate fi descompus în factori astfel:

$$\begin{aligned} X^2 - (1/2 + 1/3)X + 1/6 &= X^2 - X(1/2 + 1/3) + 1/6 \\ &= X(X - 1/2) - 1/3(X - 1/2) = (X - 1/2)(X - 1/3) \end{aligned}$$

Soluțiile sînt deci $1/2$ și $1/3$.

EXERCITII

1) (oral) Explicați de ce următoarele ecuații nu au soluții

a) $x = 1 + 1/2$, b) $x^2 + 6x + 9 = -1$, c) $5(x + 1) + 29 = 0$, d) $(x - m) - 4 = 1/2$

2) Rezolvați ecuațiile (a, b și m sînt parametri reali)

a) $x^2 - 1 = 0$, b) $x + 1 = 0$, c) $x = 100$, d) $9x = 1$, e) $4x = 0$ f) $0 = 1$ g) $144x = 1$ g) $x = 4p$
h) $0 = 884x - 625$, i) $x = (a + 1) + 0$, j) $49x = 0$ k) $13x + (a - 9) = 0$ l) $5x + a + b = 2ab$
m) $2x = 3m$

3) Aflați toate numerele reale care sînt egale cu pătratele lor

4) Ionică a ...

Ecuația $4x^2 - 4x + 1 = 0$ este descompusă în factori astfel: $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)(2x - 1)$ sau $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
Deci soluția ecuației este $\frac{1}{2}$. În ce constă greșeala lui Ionică?

5) Rezolvați ecuațiile (m este un parametru real)

a) $(x + 8)(x - 5) = 0$, b) $(3x - 5)(x + 5) = 0$, c) $4x(5x - 1) = 0$, d) $12x = 0$, e) $x + 3|x| = 0$,
f) $2x^2 = 19x$; g) $x^2 = 59x$, h) $|18x + 2x| = 0$, i) $x(x - 1) + 14x - 1 = 0$, j) $x + mx = 0$, k) $(x + 1)(x + 1) = 0$, l) $(1 + m)x^2 = x$

6) Rezolvați ecuațiile :

a) $(x + 1)^2 = 25$, b) $x^2 + 4x + 4 = 1$, c) $x^2 + 4x + 4 = 1$, d) $x^2 + 4x + 4 = 0$, e) $x^2 + 10x + 16 = 0$,
f) $x^2 + 10x + 25 = 0$, g) $x^2 + (1/2 + 1/5)x + 1/10 = 0$, h) $x^2 - (1 + \pi)x + \pi = 0$, i) $|3x + 1| + |3|x| + 1| = 0$,
j) $(x - 7)^2 = 2$, k) $x^2 + (m + n)x + mn = 0$, l) $mnx + (m + n)x + 1 = 0$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$)

$$7) \text{ Arătați că } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ are soluții în } \mathbb{R} \text{ dacă și numai dacă } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ are soluții în } \mathbb{R}.$$

$$8) \text{ Arătați că } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ are soluții în } \mathbb{R} \text{ dacă și numai dacă } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ are soluții în } \mathbb{R}.$$

unul dintre ele este 0

$$b) \text{ Dacă } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ are soluții în } \mathbb{R},$$

dintre ele este 0

c) Rezolvați ecuațiile

$$x(x + 1)(x + 2) = 0, (x - 1)x = (x - 1)(6x - 8), x + 1 + \sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}x = 0$$

$$9) x^2 + 2x + 3 = 0$$

Aflați dimensiunile, cu aproximație de 1 mm

REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL II-LEA. FORMULA DE REZOLVARE

Vom stabili o metodă de rezolvare a ecuației de gradul II-lea. Vom considera ecuația de gradul II-lea în forma generală: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Să luăm de exemplu ecuația :

$$15x^2 + 8x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$$

Împărțind ambii membri pe 15, obținem ecuația echivalentă :

$$x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = 0$$

Să considerăm trinomiul $P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15}$. Să scriem trinomiul în forma $(X + u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$. Vom încerca să scriem trinomiul în forma perfectă, care să conțină primii doi termeni ai trinomiului. Din $2u = \frac{8}{15}$ obținem $u = \frac{4}{15}$.

Să descompunem în factori :

$$P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \frac{1}{15} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{16}{225} + \frac{15}{225} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{1}{225}$$

$$\left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{1}{225} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \left(X + \frac{4}{15} - \frac{1}{15}\right)\left(X + \frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right)$$

$$\left(X - \frac{1}{15}\right)\left(X + \frac{5}{15}\right)$$

Deci ecuația are soluțiile $\frac{1}{15}$ și $-\frac{5}{15}$.

Ecuația $15x^2 + 8x + 1 = 0$ este echivalentă cu :

$$x^2 + 10x + 27 = 0,$$

adică cu $(x - 5)^2 + 2 = 0$; deci ecuația nu are soluții.

Să procedăm la fel și în cazul general. Ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0$$

este echivalentă cu ecuația $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Să considerăm funcția $P(X) = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$. Din $2u = \frac{b}{a}$ obținem $u = \frac{b}{2a}$.

Vom completa un pătrat perfect:

$$P(X) = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a} = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Polem de a notă că $P(X)$ se factorizează în factori de gradul 1 numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ este 0. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul*** ecuației (sau al funcției) $P(X)$ deoarece de obicei cu litera grecească Δ (se citește *delta*).

Distingem trei cazuri:

I. $\Delta > 0$. În acest caz $P(X)$ se poate descompune în factori

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right) \left(X + \frac{b}{2a}\right) = \left(X + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\Delta\right) \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\Delta\right).$$

Deci ecuația $X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = 0$ are două soluții

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\Delta.$$

Se obișnuiește să se scrie cele două soluții prin x_1 și x_2 . Cele două soluții se scriu sub formă concentrată astfel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\Delta}{2a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

II. $\Delta = 0$. În acest caz $P(X)$ este deja descompus în factori

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Într-unul are o rădăcină dublă, adică ecuația are o singură soluție anume $-\frac{b}{2a}$.

III. $\Delta < 0$. În acest caz $\frac{\Delta}{4a} < 0$ deci $P(X) > 0$ pentru orice număr real x , ecuația nu are nici o soluție.

* *discrimina — a separa*. Discriminantul separă cazurile

Puteți sistematiza rezolvarea ecuației de gradul al II-lea în următoarea schemă :

Cazul I : $\Delta > 0$	Ecuația are două soluții distincte $x_1 \neq x_2$	} sau	Soluțiile se calculează cu formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Cazul II : $\Delta = 0$	Ecuația are o singură soluție $x_1 = x_2$		
Cazul III : $\Delta < 0$	Ecuația nu are nici o soluție		

EXERCITIU

(oral) Explică de ce

a) dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are nici o soluție, atunci

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

b) dacă ecuația are două soluții distincte, atunci $\Delta > 0$

În cazul c) $\Delta = 0$ ecuația are o singură soluție. Ecuația de gradul al II-lea este generată direct printr-o funcție pătratică. În unele cazuri este avantajos să lucrăm prin descompunere în factori, această metodă fiind uneori mai rapidă.

2) Dacă $b = 2h$, să observăm că formula de rezolvare a ecuației devine

$$x = \frac{-2h \pm \sqrt{4h^2 - 4ac}}{2a}$$

dacă în plus $a = h$ avem $x = \frac{-2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hc}}{2h}$ sau $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4c/h}}{2}$ sau $x = -1 \pm \sqrt{1 - c/h}$

Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea este o metodă algoritmică, ea poate fi programată pentru calculator electronic.

Algoritm de calcul a soluțiilor este următorul :

Pasul 1. Citește coeficienții a , b și c ;

Pasul 2. Calculează $\Delta = b^2 - 4ac$;

Pasul 3. Dacă $\Delta < 0$, scrie „Ecuația nu are nici o soluție”, STOP

Dacă $\Delta \geq 0$, continuă cu pasul 4 ;

Pasul 4. Calculează $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Scrie x. Dacă $\Delta = 0$, scrie „O singură soluție”, STOP. Dacă $\Delta > 0$, continuă cu pasul 5 ;

Pasul 5. Calculează $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Scrie x. STOP

EXEMPLE

1) Să rezolvăm ecuația :

$$x^2 - 107x + 1302 = 0.$$

Să recunoaștem coeficienții: $a = 1$; $b = 107$; $c = 1302$. Deci $\Delta = (-107)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1302 = 11449 - 5208 = 6241$.

Observăm că $\Delta = 6241$ este un pătrat perfect: $6241 = 79^2$. Aplicând formula de rezolvare, obținem

$$x_{1,2} = \frac{-(-107) \pm \sqrt{6241}}{2 \cdot 1} = \frac{107 \pm 79}{2}$$

$$\text{Deci } x_1 = \frac{107 - 79}{2} = 14 \text{ și } x_2 = \frac{107 + 79}{2} = 93.$$

2) Să rezolvăm ecuația:

$$0,01x^2 + 4,2x + 441 = 0$$

Observăm că $a = 0,01$; $b = 4,2$; $c = 441$. Deci $\Delta = 4,2^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 441 = 17,64 - 17,64 = 0$. Deci ecuația are

o singură soluție, anume $x = \frac{-4,2}{2 \cdot 0,01} = -210$.

3) Pentru ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$ să calculăm discriminantul $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Deci ecuația are o singură soluție.

EXERCIIII REZOLVATE

1) a) Demonstrați că pentru orice m real, ecuația

$$mx^2 + (m + 1)x + m = 0, x \in \mathbb{R},$$

are soluții

b) Calculați soluțiile, presupunând $m > 1$.

c) Arătați că ecuația admite soluții reale pentru orice valoare a parametrului m .

a) Calculăm discriminantul ecuației

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4 \cdot m \cdot m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

Observăm că $\Delta = 0$ pentru $m = 1$ sau $m = -1$, deci ecuația are soluții pentru orice valoare a parametrului m .

b) Să calculăm soluțiile:

$$x_{1,2} = \frac{-(m + 1) \pm \sqrt{(m^2 - 1)}}{2m} = \frac{m^2 - 1 \pm \sqrt{m^2 - 1}}{2m}.$$

Pentru $m > 1$, avem $\sqrt{m^2 - 1} = m - 1$. Să calculăm soluțiile

$$x_1 = \frac{m^2 - 1 - (m - 1)}{2m} = \frac{m^2 - m}{2m} = \frac{m(m - 1)}{2m} = \frac{m - 1}{2}$$

c) Pentru $m = 1$ sau $m = -1$ soluția unică este $x = 0$. Din

$$(m^2 - 1) = 0 \text{ obținem } m = 1, \text{ adică } m = 1 \text{ sau } m = -1.$$

2) Se dă ecuația :

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0, x \in \mathbb{R},$$

unde m este un parametru real diferit de 0. Pentru ce valori ale lui m are ecuația :

- a) nu are soluții ;
- b) are o singură soluție ;
- c) are două soluții ?

Rezolvare. Calculăm discriminantul

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m^2 = 4(m^2 - 2m + 1 - m^2) = 4(-2m + 1).$$

Discriminantul este ≤ 0 dacă și numai dacă $-2m + 1 \leq 0$ adică $m \geq \frac{1}{2}$.

Constatăm că :

dacă $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ecuația are două soluții distincte care se pot scrie și în

cu formulele obișnuite :

dacă $m = \frac{1}{2}$ ecuația are o singură soluție $x_1 = x_2 = 1$

– dacă $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ecuația nu are soluții.

3) Aproximați, cu erorile de cel mult $0,01$, soluțiile ecuației

$$x^2 - 10x - 5 = 0, x \in \mathbb{R}$$

Rezolvare. Calculăm discriminantul $\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-5) = 120$. Deci

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{120}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{30}}{2} = 5 \pm \sqrt{30}$$

Avem $\sqrt{30} \approx 5,47$ (cu eroare de cel mult $0,01$). Deci $x_1 \approx 0,47$ și $x_2 \approx 10,47$.

EXERCITII

1) Completați tabelul

Ecuația	a	b	c	Δ	Numărul soluții
$x^2 + 5x - 6 = 0$					
$3x^2 + 7x + 4 = 0$					
$x^2 - 14x + 40 = 0$					
$x^2 - x - 8 = 0$					
$4x^2 - 4x = 0$					
$3x^2 + 13x - 14 = 0$					

2) Aflați rădăcinile polinoamelor :

a) $x^2 - 14x + 24$, b) $x^2 + 14x + 24$; c) $15x^2 - 8x + 1$; d) $2x^2 + 3x + 1$

3) Rezolvați ecuațiile :

a) $5x^2 - 9x - 2 = 0$ b) $3x^2 + 14x - 2 = 0$ c) $5x^2 - 53x - 28 = 0$ d) $10 - 14x - 0,71x + 0,3 = 0$,

e) $x^2 - 11x - 81 = 0$

4) Rezolvați ecuațiile :

a) $0,5x^2 - 0,2x - 0,1 = 0$ b) $0,3x^2 + 0,1x - 0,2 = 0$ c) $0,1x^2 - 0,3x + 0,3 = 0$ d) $0,04x^2 + 0,02x - 0,03 = 0$ Ce observați ?

5) Rezolvați ecuațiile de gradul al II-lea și, în caz alternativ, rezolvați-le :

a) $2x^2 - x - 1 = 0$, b) $x^2 + 6x + 5 = 0$, c) $-x^2 + 90x - 89 = 0$, d) $x^2 + 5x + 7 = 0$;
e) $3x^2 - 4x + 1 = 0$, f) $x^2 + x + 1 = 0$, g) $x^2 - x + 1 = 0$, h) $x^2 + x - 1 = 0$

6) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice număr real m ecuația $2x^2 + mx - 13 = 0$ are soluție. Există $x \in \mathbb{R}$ care nu m pot fi găsite ca soluție ?

7) Pentru ce valori ale lui m ecuația $x^2 + 4x - mx - 89 = 0$ are o singură soluție ?

Pentru aceste valori, rezolvați ecuația !

8) Calculați cu aproximație de o sumă soluțiile ecuației

a) $x^2 - 10x - 5 = 0$, b) $x^2 - 2x - 2 = 0$, c) $x^2 + 2x - 17 = 0$

9) Aproximați cu precizie de 0,01 soluțiile ecuațiilor

a) $x^2 - 14x - 1 = 0$ b) $x^2 + 1 - 5x = 0$ c) $x^2 - 1 = 0$

10) Aflați valoarea lui m știind că 1 verifică ecuația $mx^2 - 14x + 25 = 0$. Aflați apoi cealaltă soluție

11) Orice ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ poate fi adusă la forma $x^2 + px + q = 0$, prin împărțirea cu a . Scrieți p și q în funcție de a, b și c în ecuația $x^2 + px + q = 0$

4. ECUAȚII ECHIVALENTE CU ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Fie ecuația

$$x(x - 1) = 12, x \in \mathbb{R}.$$

Să presupunem că numărul real x este soluție a acestei ecuații, deci este adevărat că $x(x - 1) = 12$. Putem scrie $x^2 - x = 12$ sau $x^2 - x - 12 = 0$. Așadar x este soluție a ecuației de gradul al II-lea :

$$x^2 - x - 12 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Și, reciproc, orice soluție a acestei ecuații de gradul al II-lea este soluție și a ecuației $x(x - 1) = 12, x \in \mathbb{R}$. Cei doi ecuații sunt echivalente

Observați că am obținut ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 12 = 0$$

din ecuația inițială $x(x - 1) = 12$

Exemplul 2. Ecuația

$$(x - 1) = 3(x - 1)(x - 2)$$

și pe care rezolvăm în funcție de x . Dacă $x = -1$ observăm că -1 este soluție, dacă x este o altă soluție rezultă că $x + 1 = 3$ și $x = 2$. Dacă $x \neq -1$ rezultă $x + 1 = 3$, adică $x = 2$. Într-adevăr, $x = 2$ este soluția ecuației (verificăm!). Deci ecuația are două soluții: -1 și 2 .

Am putea rezolva și ecuația în alt mod, observând că ea este echivalentă cu $x + 1 = 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ sau cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$$

și rezolvând această ultimă ecuație.

Exemplul 3. Ecuația

$$9 + (x + 1) = 3(x + 2), x \in \mathbb{R}$$

este echivalentă cu

$$9 + x + 2x + 1 = 3x + 12, x \in \mathbb{R},$$

deci cu ecuația de gradul al II-lea:

$$2x^2 + 14x - 20 = 0, x \in \mathbb{R}$$

Rezolvăm-o!

Exemplul 4. Fie ecuația

$$\frac{x^2 + 5}{x} = \frac{9x + 1}{x}, x \in \mathbb{R}$$

Eliminând numitorii, o înlocuim cu:

$$5(x + 5) = 3(9x + 1), x \in \mathbb{R},$$

adică cu

$$5x^2 - 25x - 27x + 3 = 0, x \in \mathbb{R}$$

Este deci echivalentă cu ecuația de gradul al II-lea:

$$5x^2 - 27x + 22 = 0.$$

Deoarece $\Delta = 225$ obținute cu formulele obișnuite, sînt 1 și $\frac{22}{5} = 4,4$

Exemplul 5. Fie ecuația

$$\frac{x^2 + 1}{x + 7} = \frac{3x + 4}{x - 1}$$

Dacă $x = -1$ sau $x = -7$ atunci $x + 7$ sau $x - 1$ în membrul stîng sau numitorul este 0 în membrul drept sau invers, deci $x \neq -1$ și $x \neq -7$ în membrul drept numitorul este 0 .

Dacă $x = 1$ sau $x = 7$ atunci $x - 1$ sau $x + 7$ în membrul stîng sau numitorul este 0 și 1 și 7 nu sînt printre valorile x care sînt soluții ale ecuației. Deci ecuația se scrie: Evident -7 și 1 nu pot fi soluții ale ecuației.

Cum rezolvăm ecuația dată? Presupunem că numărătorul este nenul și că
denumitorul este diferit de 0.

$$\frac{2s}{s-1} = \frac{3s+4}{s-1}.$$

Întrucât $s-1 \neq 0$, $s-1 \neq 0$, înmulțim ambii membri cu numărul $(s-1)$, care este diferit de 0. Obținem (după simplificări):

$$\begin{aligned}(s-1)(2s-1) &= (s+7)(3s+4), \\ 2s^2 - s - 2s + 1 &= 3s^2 + 4s + 21s + 28, \\ s^2 - 28s - 27 &= 0.\end{aligned}$$

Având ecuația de gradul al II-lea:

$$s^2 - 28s - 27 = 0;$$

rezolvind-o, obținem $s = 27$ sau $s = -1$.

Pentru a verifica dacă există soluții, înlocuim $s = 27$ și $s = -1$ în ecuația dată și procedăm astfel:

• aducem la același numitor și eliminăm numitorii:

$$s(s-1) \cdot \frac{2s-1}{s-1} = (s+7) \cdot \frac{3s+4}{s-1}.$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea:

$$s^2 - 28s - 27 = 0$$

pe care o rezolvăm:

deci ecuația dată are soluțiile $s = 27$ și $s = -1$. Întrucât pentru aceste valori ale lui s numărătorul și denumitorul nu sunt egale cu 0, ecuația dată are soluțiile

Exemplul 6 Fie ecuația $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x}{3}$. Pentru a o rezolva procedăm ca în exemplul 5:

— eliminăm numitorii:

$$3(x^2-1) = (x-1)x;$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea:

$$\begin{aligned}3x^2 - 3 &= x^2 - x, \\ 2x^2 + x - 3 &= 0;\end{aligned}$$

deci ecuația dată are soluțiile $x = 1$ și $x = -\frac{3}{2}$.

— verificăm dacă există soluții: înlocuim $x = 1$ și $x = -\frac{3}{2}$ în ecuația dată și procedăm astfel:

• aducem la același numitor și eliminăm numitorii:

Exemplu 7. Ecuația $\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} = 2$ se înlocuiește cu

$$3x^2 + 1 = 2(x^2 + 2),$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - 3 = 0.$$

Ea are soluțiile $- \sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$ (verificați!).

Exemplu 8. Pentru a rezolva ecuația

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{5}{x + 2} = \frac{x}{x^2 - 4}$$

adecvăm ambele părți cu numărul $x^2 - 4$ (exemplu 1, exercițiu 1) și obținem $x = 4$ după operațiunile:

$$(x + 2)x + (x - 2)5 = 8,$$

$$\text{adică } x^2 + 2x + 5x - 10 = 8,$$

$$\text{sau } x^2 + 7x - 18 = 0.$$

Rezultă din această ecuație de gradul al II-lea că numărul $x = -9$ este singura soluție a ecuației, deoarece $x = 4$ este o rădăcină, dar nu este soluție a ecuației inițiale deoarece, dacă înlocuim $x = 4$ în ecuația inițială, obținem $\frac{4}{-4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{-4}$.

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{5}{x + 2} = \frac{x}{x^2 - 4}$$

are singură soluție, anume -9 (verificați!).

Exemplu 9. Ecuația

$$(x + 1) = x$$

este echivalentă cu ecuația

$$x + 3x - 3x = x + 3x - 3x - 1$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea:

$$6x^2 + 2 = 0.$$

Aceasta nu are nici o soluție.

EXERCIIII

1) Rezolvați ecuațiile

$$1) x + x = 2x, \quad 2) x + x = 2x, \quad 3) x + x = 2x,$$

2) Rezolvați ecuațiile

$$1) (x + 2) = x + 2, \quad 2) (x + 2) = x + 2, \quad 3) (x + 2) = x + 2, \quad 4) (x + 2) = x + 2,$$

3) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{x^2 + 1}{2} = 5(x + 2)$, b) $\frac{(x - 1)^2}{4} = x^2 - 2$, c) $\frac{x^2 + 1}{3} = 5(x - 2)$

4) Rezolvați ecuațiile

a) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$, b) $(x + 1) + (x - 2) = 1$, c) $(x + 1) - 1 = 2(x + 3)$, d) $x(x - 1) = (x + 1)(2 - x)$

5) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}$, b) $\frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{2}{x + 1} = \frac{3}{x}$, d) $\frac{2x}{x + 1} = \frac{1}{2}$

6) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{x - 1}{x - 2}$, b) $\frac{5x}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

7) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{x + 1}{2} = \frac{x - 2}{x + 2}$, b) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5}$

8) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{3x + 1}{x + 2} = \frac{x - 1}{x - 2} + 1$, b) $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5}$,
c) $\frac{1}{x - 1} = 1$, d) $\frac{2x}{2x - 1} = \frac{3(2x - 1)}{2x - 1} + \frac{3x}{4x}$

9) Justificați de ce ecuațiile următoare nu au soluții

a) $3(x - 9) = 2 - \frac{1}{x + 1}$, b) $\frac{1}{x + 1} = -1$, c) $2(x - 2) + 3(x - 3) = 0$

5. RELAȚII ÎNTRE RADACINILE ȘI COEFICIENȚII TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să considerăm trinomul de gradul al II-lea

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Dacă discriminantul său $\Delta = b^2 - 4ac$ este ≥ 0 , trinomul are două rădăcini; acestea se calculează în funcție de coeficienți a, b, c și Δ prin

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Să presupunem acum că ne sunt cunoscute cele două rădăcini x_1 și x_2 ale celui de gradul al II-lea. Putem oare afla coeficienții?

Să calculăm suma și apoi produsul rădăcinilor

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{b}{2a} \cdot x_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Putem scrie astfel

$$b = -a(x_1 + x_2),$$

$$c = ax_1 x_2.$$

Să considerăm ca mai multe însumări de gradul II cu a rădăcinile x_1 și x_2 . Dar, dacă ne alegem valoarea lui a de exemplu, dacă luăm $a = 1$, atunci coeficienții b și c sînt *unic determinați* de rădăcini.

Formulele

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

poartă numele de *relațiile între rădăcinile și coeficienți* (numite de gradul al II-lea (sau *relațiile lui Viète**)).

Observație: Dacă scriem $a \neq 0$, înlocuim x cu $\frac{x}{a}$ și înmulțim cu a obținem ecuația

$$x^2 + bx + c = 0$$

EXERCITII REZOLVATE

1) Calculați suma și produsul soluțiilor ecuației :

$$3x^2 - 7x - 113 = 0$$

Rezolvare: Ecuația are două soluții reale tot discriminantul ei este > 0 . Pentru a calcula soluțiile, putem scrie :

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3}, \quad x_1 x_2 = -\frac{113}{3}.$$

2) Fie ecuația :

$$2x^2 - mx - 3 = 0$$

a) Demonstrați că pentru orice valoare a parametrului m ecuația are două soluții.

b) Calculați (în funcție de m) :

* = suma rădăcinilor trinomialului $2X^2 - mX - 3$

* François Viète (1540-1603) matematician francez, unul dintre creatorii algebrei, s-a ocupat în special cu rezolvarea ecuațiilor

produsul rădăcinilor ;

suma inverselor rădăcinilor ,

suma pătratelor rădăcinilor ,

suma cuburilor rădăcinilor

Rezolvare a) Să recunoaştem că $a = 2, b = m + 3$, deci $\Delta = m^2 + 24 > 0$ pentru orice m real , deci ecuaţia are două soluţii

b) Aplicind formulele lui Viète, obţinem

$$x_1 + x_2 = \frac{a}{2} = x_1 x_2 = \frac{3}{2}$$

Apoi :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{b}{a} = \frac{m}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{m^2}{4} - 12$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{3}{2}\right) \frac{a}{2} = \frac{m^3}{8} - \frac{m^2 + 18m}{8}$$

3) Fie ecuaţiile de gradul al II-lea

$$a x^2 + b x + c_1 = 0,$$

$$a x^2 + b x + c_2 = 0$$

Doar atunci $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ mai dacă

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

Rezolvare Presupunem că ecuaţiile au aceleaşi soluţii fie acestea x_1 şi x_2 .
Relaţiile lui Viète pentru prima ecuaţie sînt

$$x_1 + x_2 = \frac{b_1}{a_1} \quad x_1 x_2 = \frac{c_1}{a_1}$$

iar pentru a doua ecuaţie sînt

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Rezultă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}$, obţinîndu-se , obţinînd proprietăţile proporţiilor

deducem că :

Reciproc presupunând că cele două ecuații au câte o rădăcină proporțională, să notăm cu x valoarea comună a rădăcinilor și $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Atunci $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$ și $c = \lambda c_1$. Evident $\lambda \neq 0$. Astfel, ecuațiile sunt echivalente deoarece punem în evidență că $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ prin înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{\lambda}$ (sau λ).

4) Un dreptunghi are aria de 60 cm² și perimetrul de 38 cm. Aflați dimensiunile sale.

Rezoluție: Scriem ecuația dreptunghiului: $x^2 - 19x + 60 = 0$, în care x este lățimea L și L este dreptunghiului și $19 \times$ și 60 lățimea și perimetrul dreptunghiului ale căror soluții sunt L și l :

$$x^2 - 19x + 60 = 0$$

Rezolvând ecuația găsim $x_1 = 4$ și $x_2 = 15$, deci dimensiunile dreptunghiului sunt: $L = 15$ (cm), $l = 4$ (cm).

EXERCITIIU

1) Calculați suma, produsul și suma pătratelor rădăcinilor polinoamelor

a) $2x^2 - 4x + 1$, b) $3x^2 - 8x + 5$, c) $x^2 - 6x - 1$, d) $3x^2 - 36x + 5$, e) $2x^2 - 16x + 10$, f) $9x^2 + 16x - 27$.

2) Formați ecuații de gradul al II-lea ale căror soluții sunt

a) 5 și 1, b) 1 și 2, c) 2 și 3, d) 3 și 4, e) 4 și 4, f) 4 și 4, g) 3,5 și 5,5, h) $7 - \sqrt{3}$ și $7 + \sqrt{3}$, i) $3 - \sqrt{3}$ și $3 + \sqrt{3}$, j) $2 + \sqrt{3}$ și $2 - \sqrt{3}$, k) $1 - \sqrt{3}$ și $2 - \sqrt{3}$.

3) Rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ sunt x_1 și x_2 . Aflați valoarea lui p și q dacă coeficientul necunoscut

a) $x^2 + px + 1 = 0$

b) $2x^2 + mx - 5 = 0$, $x_1 = 5$

c) $x^2 - 5x = 0$

4) Aflați două numere, cunoscând că au suma 337 și produsul 8086.

5) Aflați două numere pozitive, știind că media aritmetică a lor este 133,5 și media geometrică a lor este 120.

6) Aflați dimensiunile unui dreptunghi, cunoscând că are

a) perimetrul de 84 m, aria de 185 m²,

b) perimetrul de 108 m, aria de 729 m²,

c) perimetrul de 108 m, aria de 542 m².

7) Pentru ce valori ale lui m și n , ecuațiile

$$x^2 - 6x = 0$$

$$2x^2 - nx + m = 0$$

sunt echivalente?

De exemplu, să descompunem în factori trinomiul

$$41X^2 + 205X - 8364$$

Discriminantul său este $\Delta = 205^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-8364) = 1\,413\,721$. Deci trinomiul se descompune ca produs de doi factori de gradul I

$$X = \frac{205 \pm \sqrt{1\,413\,721}}{82} = \frac{205 \pm 1\,189}{82}$$

$$\text{deci } X = \frac{205 - 1\,189}{82} = \frac{-1\,394}{82} = -17 \text{ sau } X = \frac{205 + 1\,189}{82} = 12.$$

Rezultă

$$41X^2 + 205X - 8364 = 41(X + 17)(X - 12) = (41X + 697)(X - 12)$$

EXERCITII

1) Descompuneți în factori de gradul I

a) $X^2 - 13X + 30$; b) $X^2 + 36X + 323$; c) $2X^2 - 5X - 12$; d) $X^2 + 5X - 4$; e) $X^2 - 2 \mid 2X - 5$,
f) $X^2 - 4X - 5$; g) $10X^2 - 43X + 12$; h) $X^2 - 2X - 1$; i) $2X^2 - 2 \mid 2X - 3$

2) Simplificați fracțiile

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{X^2 + 10X - 39}{2X^2 - 21X + 45} \quad \text{b)} \quad \frac{X^2 + X - 12}{2X^2 - X - 6} \quad \text{c)} \quad \frac{6X^2 - 5X + 1}{X^2 - X - 6} \quad \text{d)} \quad \frac{X^2 + X - 40}{X^2 - X - 6} \quad \text{e)} \quad \frac{3X^2 - 7X + 2}{X^2 - 2X - 18} \\ & \frac{X^2 + 7X - 8}{X^2 - X - 6} \quad \text{f)} \quad \frac{2X^2 - 5X - 3}{X^2 - X - 6} \end{aligned}$$

7* Demonstrați că $X^2 + 2X + m^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.
 $= X^2 + 2X + m^2 + 1$ este ireductibil)

7. ECUAȚII CARE SE REZOLVA CU AJUTORUL UNOR ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Să rezolvăm ecuația :

$$\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = 5 - \frac{5}{x - 5}$$

Nu putem înlocui necunoscuta x prin m deoarece $x = 5$ este soluție a ecuației
 înmulțind ambii membri ai ecuației cu $x - 5$ obținem $x^2 - 6x = 5(x - 5)$ (care este
 diferit de 0) obținem $x^2 - 6x - 5(x - 5) = 0$ sau $x^2 - 11x + 25 = 0$. Deci x este soluție a
 ecuației de gradul al II-lea :

$$x^2 - 11x + 25 = 0$$

Soluțiile acestei ecuații care sînt de ca formă obișnuită sînt 1 și 5, dar numai prima aparține mulțimii \mathbb{R}^+ . Deci ecuația $\sqrt{x^2 + 6x} = 5 - x$ are o singură soluție, anume numărul 1.

Exemplul 2. Să rezolvăm ecuația

$$| \sqrt{x} - 6 | = x.$$

Să presupunem că numărul x este soluție a ecuației, atunci $| \sqrt{x} - 6 | = x$. Pentru a putea extrage radicalul pătrăți numărului x trebuie să fie evident $x \geq 0$. Pe de altă parte, x este un număr ≥ 0 deci $6 - \sqrt{x} \geq 0$ adică $x \leq 6$. Așadar x va trebui să aparțină intervalului $[0; 6]$.

Scindăm la putere egală, iar $\sqrt{x} = 6 - x$ obținem $x = (6 - x)^2$, sau $x^2 - 13x + 36 = 0$. Așadar numărul x este soluție a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Această ecuație de gradul II-lea are ca soluții numerice 4 și 9. Dintre acestea doar 4 aparține intervalului $[0; 6]$. Putem constata și prin înlocuire directă că 9 nu verifică ecuația $| \sqrt{x} - 6 | = x$. Deci ecuația $| \sqrt{x} - 6 | = x$ admite o singură soluție: 4.

Observăm că ecuațiile $| \sqrt{x} - 6 | = x$ și $| \sqrt{x} - 6 | = x + 1$ au aceeași mulțime de soluții, dar ele nu sînt echivalente. Motivele sunt: prima ecuație este inclusă în mulțimea soluțiilor celei de-a doua, dar nu coincide cu ea.

Deoarece $| \sqrt{x} - 6 | = x$ și $| \sqrt{x} - 6 | = x + 1$ au aceeași mulțime de soluții, relația $| \sqrt{x} - 6 | = x$ să implice $| \sqrt{x} - 6 | = x + 1$, este necesar ca x și $x + 1$ să aibă același semn.

Exemplul 3. Fie ecuația

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = x.$$

Pentru a putea extrage radicalul $\sqrt{x - 2}$ este necesar ca $x - 2 \geq 0$ (primul radical ≥ 0). De asemenea radicalul $\sqrt{2 - x}$ este definit dacă $2 - x \geq 0$ adică $x \leq 2$. Necunoscuta x poate lua valori doar în mulțimea $\{2\}$. Observăm că 2 este soluție a ecuației.

Exemplul 4. Rezolvați ecuația

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = 3.$$

Că și exemplul 3, necunoscuta x poate lua valori doar în mulțimea $\{2\}$. Înlocuind în ecuație necunoscuta x cu 2 obținem o propoziție falsă, deci ecuația nu are nici o soluție.

Exemplul 5. Să rezolvăm ecuația

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{11 - x} = 5$$

Putem înlocui necunoscuta x cu numere x astfel încît $x + 2 \geq 0$ și $11 - x \geq 0$ deci necunoscuta x poate lua valori doar în intervalul $[-2; 11]$.

Fie x un număr din acest interval, atunci numărul $|x + 2| + |11 - x|$ este pozitiv (ca sumă a doi radicali), ecuația este deci echivalentă cu

$$(x + 2) + (11 - x) = 25, x \in [-2; 11]$$

adică cu :

$$x + 2 + 2(x + 2)(11 - x) + 11 - x = 25, x \in [-2; 11]$$

sau

$$2(x + 2)(11 - x) = 6, x \in [-2; 11]$$

Și această ecuație atât membrul stâng cât și cel drept sunt pozitivi, deci ecuația este echivalentă cu :

$$(x + 2)(11 - x) = 36, x \in [-2; 11]$$

sau cu :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, x \in [-2; 11]$$

Ecuația de gradul al II-lea :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

are două soluții $x_1 = 2$ și $x_2 = 7$. Amândoua aparțin intervalului $[-2; 11]$ deci sunt soluții ale ecuației $\sqrt{x + 2} + \sqrt{11 - x} = 5$.

Exemplul 6. Fie ecuația de gradul al IV-lea

$$x^4 - 27x^2 + 50 = 0$$

Prin substituția $y = x^2$ obținem ecuația de gradul al II-lea (în necunoscuta y)

$$y^2 - 27y + 50 = 0,$$

ale cărei soluții sunt 2 și 25. Deci $x^2 = 2$ sau $x^2 = 25$.

Ecuația $x^2 = 2$ are soluțiile $\pm\sqrt{2}$ și ecuația $x^2 = 25$ are soluțiile ± 5 și ± 5 . Deci ecuația de gradul al IV-lea are patru soluții $\pm\sqrt{2}$ și ± 5 .

Exemplul 7. Fie ecuația de gradul al IV-lea :

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

Substituim (înlocuim) pe x^2 cu y , obținem ecuația de gradul al II-lea

$$4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

ale cărei soluții sunt $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

Ecuația $x^2 = -1$ nu are soluții ; ecuația $x^2 = \frac{1}{4}$ are soluțiile $\pm \frac{1}{2}$ și $\pm \frac{1}{2}$.

Așadar ecuația de gradul al IV-lea

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

are două soluții, numerele $-\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2}$ (verificați !)

Metoda aplicată în cele două exemple de mai sus se poate folosi pentru a rezolva orice ecuație de gradul al IV-lea de forma :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

cu $a \neq 0$. O astfel de ecuație se numește ecuație *bipătrată*.

Exemplul 8. Fie ecuația :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$$

Să înlocuim pe $x^2 + x$ cu y ; obținem

$$y = \frac{4}{y},$$

$$y^2 = 4,$$

ecuație ce are două soluții : -2 și 2

Ecuația $x^4 - x^2 - 2$ nu are soluții ; ecuația $x^4 - x^2 + 2$ are soluțiile -2 și 1 .
Așadar ecuația

$$x^4 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$$

are două soluții : -2 și 1 .

EXERCITII

1) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, b) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, c) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, d) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$;
e) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, f) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$.

2) Rezolvați ecuațiile

a) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, b) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, c) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, d) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$;
e) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, f) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, g) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, h) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, i) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, j) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, k) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$, l) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = 1$.

3) Rezolvați ecuațiile

a) $x^4 - 21x^2 + 110 = 0$, b) $x^4 + 12x^2 + 20 = 0$; c) $x^4 - 12x^2 + 20 = 0$; d) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;
e) $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

8. PROBLEME

Multe probleme de geometrie fizică tehnică etc conduc la ecuații de gradul al doilea

Formule ca $A = \pi r^2$ (aria cercului de rază r), $V = \pi r^2 h$ (volumul cilindrului circular de rază r și înălțime h), $P = I^2 R$ (puterea în funcție de intensitate și rezistență) devin ecuații de gradul al II-lea atunci când necunoscuta este r respectiv I . Să rezolvăm câteva probleme care conduc la ecuații de gradul al II-lea.

Problema 1. Fie ABC un triunghi. Determinați pe segmentul BC (de lungime a) un punct M astfel încât, ducând paralela MN la latura AB , aria trapezului $ABMN$ să fie de 4 ori mai mare decât aria triunghiului MNC (vezi figura 1).

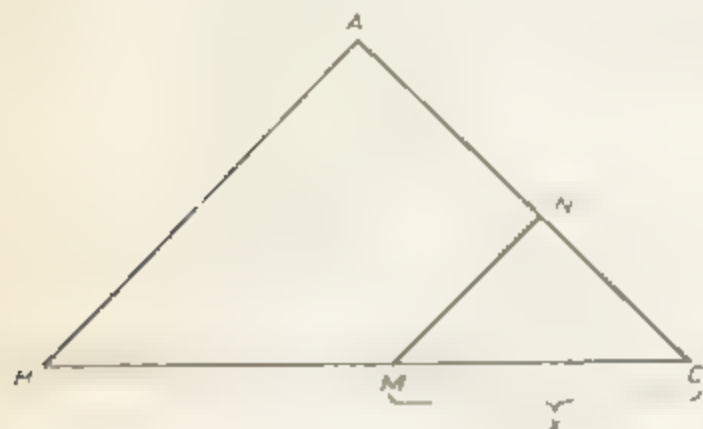


Fig. IV.1

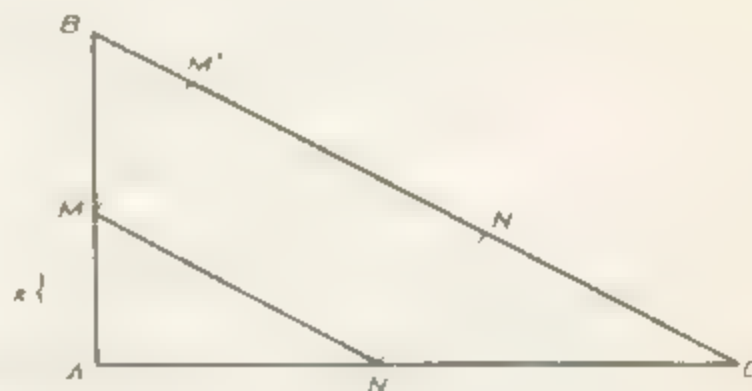


Fig. IV.2

Rezolvare. Să notăm cu x lungimea segmentului CM . Faptul că punctul M aparține segmentului BC impune condiția $0 < x < a$.

Din faptul că $S_{ABMN} = 4 \cdot S_{MNC}$ rezultă că $S_{ABC} = S_{ABMN} + S_{MNC} = 5 \cdot S_{MNC}$.

Însă cele două triunghiuri sînt asemenea, deci raportul ariilor lor este pătratul raportului de asemănare :

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MNC}} = \left(\frac{AB}{MC} \right)^2 = 4.$$

Obținem astfel ecuația $\left(\frac{a}{x} \right)^2 = 5$, rezolvînd-o găsim că are două soluții

$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$ sau $x = \frac{a}{\sqrt{5}}$. Prima soluție nu corespunde (nu aparține intervalului $[0, a]$). Poziția punctului M trebuie aleasă deci în așa fel încît

$$MC = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Problema 2. O paralelă la ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC taie laturile AB , AC în punctele M respectiv N . Construim perpendicularele MM' , NN' pe BC (vezi figura 2). Determinați poziția punctului M astfel încît aria dreptunghiului $MNN'M'$ să fie s .

Rezolvare. Fie x lungimea segmentului AM (evident $0 < x < c$).

Segmentul MB are lungimea $c - x$. Din asemănarea triunghiurilor BMM'

și ABC obținem $\frac{c-x}{MM'} = \frac{a}{b}$ adică lungimea segmentului MM' este $\frac{b(c-x)}{a}$.

Din asemenea triunghiuri $AMN \sim ABC$ obținem $\frac{MN}{c} = \frac{b(c-x)}{a}$ adică lungimea segmentului MN este $\frac{b^2(c-x)}{a}$.

Area triunghiului MNM' este $\frac{b(c-x)}{a} \cdot \frac{a^2x}{c} = \frac{b^2(c-x)x}{c}$.

Impunând ca această arie să fie s , obținem ecuația:

$$b^2(c-x)x = cs$$

sau: $bx^2 - bcx + cs = 0$

Avem $\Delta = b^2c^2 - 4cs = b^2c^2 - 4cs$ și $x = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4cs}}{2b}$. Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții. Dacă $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție $x = \frac{bc}{2}$. Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții x_1 și x_2 .

Să analizăm cazurile: 1. Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții.

Cazul 1. Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții. Dacă $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție $x = \frac{bc}{2}$. Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții x_1 și x_2 .

Cazul 2. Dacă $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție $x = \frac{bc}{2}$. Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții x_1 și x_2 .

Cazul 1. Dacă $0 \leq s < \frac{b^2c}{4}$, ecuația are două soluții

$$x_1 = \frac{bc - \sqrt{b^2c^2 - 4cs}}{2b}, x_2 = \frac{bc + \sqrt{b^2c^2 - 4cs}}{2b}$$



Fig. 18.3

Amândouă corespund unor soluții ale problemei, punctele M_1 și M_2 (vezi figura 3).

Cazul 4. Dacă $s < 0$, ecuația încă are două soluții x_1 și x_2 , dar ele nu corespund vreunei soluții a problemei. Problema nu are soluție (când s poate fi negativă!).

Problema 3. Aflați numărul unui triunghi dreptunghic în care ca sunt numere naturale consecutive.

Rezolvare. Fie $x, x+1, x+2$ lungimile laturilor triunghiului. Putem scrie

avind lungimea $x + 2$. Să aplicăm teorema lui Pitagora: $(x + 2)^2 = x^2 + (x - 1)^2$. Rezolvind această ecuație obținem $x = 1$ ($x = -3$). Prima soluție a ecuației nu convine (nu este număr natural!). Problema are o singură soluție: triunghiul cu laturile de lungimi 3, 4 și 5.

Problema 4 Demonstrați că nu există două numere întregi consecutive al căror produs să fie 588.

Rezolvare Să presupunem prin absurd că produsul numerelor întregi consecutive x și $x + 1$ este 588. Deci numărul x este soluție a ecuației

$$x(x + 1) = 588,$$

sau a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 + x - 588 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuații nu este pătratul unui număr întreg (numărul 2353 este național). Așadar ecuația nu are soluții întregi. Obținem o contradicție.

Problema 5 Două autocamioane pleacă în același moment într-o cursă de 440 km: primul, circula cu o viteză mai mare cu 15 km/h decât viteza celui de-al doilea. Aflați vitezele medii cu care au circulat știind că al doilea autocamion a sosit la trei ore după primul.

Rezolvare Să notăm cu x și y vitezele celor două autocamioane. Relația $x = y + 15$ este imediată. Durata călătoriei primului este de $\frac{440}{x} = \frac{440}{y+15}$ ore, iar a celui de-al doilea de $\frac{440}{y}$ ore. Obținem ecuația

$$\frac{440}{y+15} + 3 = \frac{440}{y}.$$

Rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației de gradul al II-lea:

$$y^2 + 15y - 2200 = 0,$$

ale cărei soluții sînt $y_1 = -55$, $y_2 = 40$.

Prima soluție nu convine (viteza nu poate fi negativă!). Vitezele celor două autocamioane au fost de 40 și respectiv 55 km/h.

Problema 6 Un tablou are dimensiunile de 30 cm și 40 cm. Tabloul împreună cu rama are o suprafață de 2184 cm². Aflați lățimea ramei.

Rezolvare Fie x (cm) lățimea ramei. Atunci tabloul înrămat are forma unui dreptunghi cu lungimea de $40 + 2x$ cm și lățimea de $30 + 2x$ cm, adică avind suprafața de $(2x + 40)(2x + 30)$ cm². Obținem lățimea x a ramei rezolvind ecuația

$$(2x + 40)(2x + 30) = 2184$$

Acceptăm o singură soluție : $x = 6$ cm.

Problema 7 Două conductori electrice legați în serie au rezistența de 15 ohmi, iar legați în paralel au rezistența de 3 ohmi. Aflați rezistența fiecărui conductor.

Rezolvare Se știe că după legarea în serie a doi rezistori ce au rezistențele x (ohmi), respectiv y (ohmi), ansamblul lor are rezistența $x + y$ (ohmi), după legarea în paralel, ansamblul are rezistența $\frac{xy}{x+y}$, adică $\frac{xy}{15}$ ohmi. Cunoscând suma și produsul numerelor x și y le putem afla rezolvând ecuația de gradul al II-lea

$$R^2 - 15R + 45 = 0$$

Cele două rezistențe sînt de aproximativ 4,1 respectiv 10,9 ohmi.

Problema 8 O ecuație fizică afirmă că un corp aruncat pe verticală (în sus), cu viteza inițială v_0 m/s, se va afla după t secunde de la aruncare la înălțimea $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, în această formulă g este "accelerarea gravitațională" determinată de atracția Pământului. Știind că g este de aproximativ 10 m/s². Aflați după ce timp de t aruncat corpul se va afla la înălțimea de 100 m, dacă a fost aruncat cu viteza inițială de 45 m/s.

Rezolvare Va trebui să rezolvăm ecuația :

$$100 = 45t - 5t^2$$

în necunoscuta t . Într-un sens, $t = 4$ și $t = 5$. Deci corpul se va afla de două ori la înălțimea de 100 m : prima dată în urcare, după 4 secunde de la aruncare, a doua oară în coborîre, după 5 secunde de la aruncare.

PROBLEME

1. Dăruiește coordonatele O și A dintr-un cerc cu raza egală cu cea a acestui cerc. Aflați cît de aproape sînt O și A de la centrul cercului de 30 m.

2. Un pătrat are dimensiunile de 1320 cm în diagonale prin două numere naturale consecutive. Aflați aceste dimensiuni.

3. Aflați numărul de diagonale ale unui poligon cu 5 diagonale. Cîte diagonale are un poligon cu 10 diagonale? Cîte diagonale are un poligon cu 170 de diagonale?

4. Aflați valoarea lui x și y din ecuația $2x + 3y = 10$ și $x - y = 2$.

5. Într-un teren dreptunghiular cu lățimea de 16 m. Una dintre camere este de 10 m, iar cealaltă este de 8 m. Cîte camere de 10 m și 8 m se pot face în acest teren?

6. Aflați valoarea lui x și y din ecuația $2x + 3y = 10$ și $x - y = 2$ și aflați rezistența totală de 20 ohmi în legați în paralel au rezistența de 48 ohmi.

7. Dăruiește coordonatele O și A dintr-un cerc cu raza egală cu cea a acestui cerc. Aflați cît de aproape sînt O și A de la centrul cercului de 30 m.

Lucrări pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

LUCRARFA I

1) Rezolvați ecuațiile .

$$x^2 - 14x - 0 ; 4x^2 - 1 = 0 ; x^2 - 17x + 42 = 0 ; 9x^2 + 6x + 1 = 0.$$

2) Găsiți rădăcinile trinomialor

$$x^4 + 13x - 30 ; 2x^2 - 3x + 0,5.$$

3) Formați ecuațiile de gradul al II-lea ale căror soluții sînt

$$5 \text{ și } -8 ; 7 \text{ și } -7 ; 3 \text{ și } 18 ; 4 \text{ și } 0$$

LUCRAREA a II-a

1) Descompuneți în factori ireductibili trinomialele

$$x^2 + 17x + 72 , 2x^2 - 27x + 13$$

2) Simplificați fracțiile

$$\frac{4x - 1}{x - 5x} \qquad \frac{4x - 5x - 1}{5x - 4x}$$

3) Pentru $x = 0$ și pentru întreg $x \in \mathbb{N}$ din \mathbb{N} la 210. Aflați numerele

4) Două numere au suma 13,7 iar produsul 46,8. Aflați numerele

CAPITOLUL V

EXERCIIII ȘI PROBLEME

I. EXERCIIII ȘI PROBLEME SUPLEMENTARE

1) Știm că $\frac{1}{x} = 1,024$. Care este inversul lui x ?

2) Fie numărul $u = \frac{11}{12}$. Scrieți pe u^{-1} , u^{-u} sub formă de fracție.

3) Dacă $\frac{1}{x} = 1,6$, $\frac{1}{y} = 4,1$, $\frac{1}{z} = 5,2$, $\frac{1}{w} = 6,3$, $\frac{1}{v} = 7,4$, $\frac{1}{t} = 8,5$, $\frac{1}{s} = 9,6$, $\frac{1}{r} = 10,7$, $\frac{1}{q} = 11,8$, $\frac{1}{p} = 12,9$, $\frac{1}{m} = 14,0$, $\frac{1}{n} = 15,1$, $\frac{1}{l} = 16,2$, $\frac{1}{k} = 17,3$, $\frac{1}{j} = 18,4$, $\frac{1}{i} = 19,5$, $\frac{1}{h} = 20,6$, $\frac{1}{g} = 21,7$, $\frac{1}{f} = 22,8$, $\frac{1}{e} = 23,9$, $\frac{1}{d} = 24,0$, $\frac{1}{c} = 25,1$, $\frac{1}{b} = 26,2$, $\frac{1}{a} = 27,3$, $\frac{1}{p} = 28,4$, $\frac{1}{q} = 29,5$, $\frac{1}{r} = 30,6$, $\frac{1}{s} = 31,7$, $\frac{1}{t} = 32,8$, $\frac{1}{v} = 33,9$, $\frac{1}{w} = 34,0$, $\frac{1}{x} = 35,1$, $\frac{1}{y} = 36,2$, $\frac{1}{z} = 37,3$, $\frac{1}{a} = 38,4$, $\frac{1}{b} = 39,5$, $\frac{1}{c} = 40,6$, $\frac{1}{d} = 41,7$, $\frac{1}{e} = 42,8$, $\frac{1}{f} = 43,9$, $\frac{1}{g} = 44,0$, $\frac{1}{h} = 45,1$, $\frac{1}{i} = 46,2$, $\frac{1}{j} = 47,3$, $\frac{1}{k} = 48,4$, $\frac{1}{l} = 49,5$, $\frac{1}{m} = 50,6$, $\frac{1}{n} = 51,7$, $\frac{1}{o} = 52,8$, $\frac{1}{p} = 53,9$, $\frac{1}{q} = 54,0$, $\frac{1}{r} = 55,1$, $\frac{1}{s} = 56,2$, $\frac{1}{t} = 57,3$, $\frac{1}{u} = 58,4$, $\frac{1}{v} = 59,5$, $\frac{1}{w} = 60,6$, $\frac{1}{x} = 61,7$, $\frac{1}{y} = 62,8$, $\frac{1}{z} = 63,9$, $\frac{1}{a} = 64,0$, $\frac{1}{b} = 65,1$, $\frac{1}{c} = 66,2$, $\frac{1}{d} = 67,3$, $\frac{1}{e} = 68,4$, $\frac{1}{f} = 69,5$, $\frac{1}{g} = 70,6$, $\frac{1}{h} = 71,7$, $\frac{1}{i} = 72,8$, $\frac{1}{j} = 73,9$, $\frac{1}{k} = 74,0$, $\frac{1}{l} = 75,1$, $\frac{1}{m} = 76,2$, $\frac{1}{n} = 77,3$, $\frac{1}{o} = 78,4$, $\frac{1}{p} = 79,5$, $\frac{1}{q} = 80,6$, $\frac{1}{r} = 81,7$, $\frac{1}{s} = 82,8$, $\frac{1}{t} = 83,9$, $\frac{1}{u} = 84,0$, $\frac{1}{v} = 85,1$, $\frac{1}{w} = 86,2$, $\frac{1}{x} = 87,3$, $\frac{1}{y} = 88,4$, $\frac{1}{z} = 89,5$, $\frac{1}{a} = 90,6$, $\frac{1}{b} = 91,7$, $\frac{1}{c} = 92,8$, $\frac{1}{d} = 93,9$, $\frac{1}{e} = 94,0$, $\frac{1}{f} = 95,1$, $\frac{1}{g} = 96,2$, $\frac{1}{h} = 97,3$, $\frac{1}{i} = 98,4$, $\frac{1}{j} = 99,5$, $\frac{1}{k} = 100,6$, $\frac{1}{l} = 101,7$, $\frac{1}{m} = 102,8$, $\frac{1}{n} = 103,9$, $\frac{1}{o} = 104,0$, $\frac{1}{p} = 105,1$, $\frac{1}{q} = 106,2$, $\frac{1}{r} = 107,3$, $\frac{1}{s} = 108,4$, $\frac{1}{t} = 109,5$, $\frac{1}{u} = 110,6$, $\frac{1}{v} = 111,7$, $\frac{1}{w} = 112,8$, $\frac{1}{x} = 113,9$, $\frac{1}{y} = 114,0$, $\frac{1}{z} = 115,1$, $\frac{1}{a} = 116,2$, $\frac{1}{b} = 117,3$, $\frac{1}{c} = 118,4$, $\frac{1}{d} = 119,5$, $\frac{1}{e} = 120,6$, $\frac{1}{f} = 121,7$, $\frac{1}{g} = 122,8$, $\frac{1}{h} = 123,9$, $\frac{1}{i} = 124,0$, $\frac{1}{j} = 125,1$, $\frac{1}{k} = 126,2$, $\frac{1}{l} = 127,3$, $\frac{1}{m} = 128,4$, $\frac{1}{n} = 129,5$, $\frac{1}{o} = 130,6$, $\frac{1}{p} = 131,7$, $\frac{1}{q} = 132,8$, $\frac{1}{r} = 133,9$, $\frac{1}{s} = 134,0$, $\frac{1}{t} = 135,1$, $\frac{1}{u} = 136,2$, $\frac{1}{v} = 137,3$, $\frac{1}{w} = 138,4$, $\frac{1}{x} = 139,5$, $\frac{1}{y} = 140,6$, $\frac{1}{z} = 141,7$, $\frac{1}{a} = 142,8$, $\frac{1}{b} = 143,9$, $\frac{1}{c} = 144,0$, $\frac{1}{d} = 145,1$, $\frac{1}{e} = 146,2$, $\frac{1}{f} = 147,3$, $\frac{1}{g} = 148,4$, $\frac{1}{h} = 149,5$, $\frac{1}{i} = 150,6$, $\frac{1}{j} = 151,7$, $\frac{1}{k} = 152,8$, $\frac{1}{l} = 153,9$, $\frac{1}{m} = 154,0$, $\frac{1}{n} = 155,1$, $\frac{1}{o} = 156,2$, $\frac{1}{p} = 157,3$, $\frac{1}{q} = 158,4$, $\frac{1}{r} = 159,5$, $\frac{1}{s} = 160,6$, $\frac{1}{t} = 161,7$, $\frac{1}{u} = 162,8$, $\frac{1}{v} = 163,9$, $\frac{1}{w} = 164,0$, $\frac{1}{x} = 165,1$, $\frac{1}{y} = 166,2$, $\frac{1}{z} = 167,3$, $\frac{1}{a} = 168,4$, $\frac{1}{b} = 169,5$, $\frac{1}{c} = 170,6$, $\frac{1}{d} = 171,7$, $\frac{1}{e} = 172,8$, $\frac{1}{f} = 173,9$, $\frac{1}{g} = 174,0$, $\frac{1}{h} = 175,1$, $\frac{1}{i} = 176,2$, $\frac{1}{j} = 177,3$, $\frac{1}{k} = 178,4$, $\frac{1}{l} = 179,5$, $\frac{1}{m} = 180,6$, $\frac{1}{n} = 181,7$, $\frac{1}{o} = 182,8$, $\frac{1}{p} = 183,9$, $\frac{1}{q} = 184,0$, $\frac{1}{r} = 185,1$, $\frac{1}{s} = 186,2$, $\frac{1}{t} = 187,3$, $\frac{1}{u} = 188,4$, $\frac{1}{v} = 189,5$, $\frac{1}{w} = 190,6$, $\frac{1}{x} = 191,7$, $\frac{1}{y} = 192,8$, $\frac{1}{z} = 193,9$, $\frac{1}{a} = 194,0$, $\frac{1}{b} = 195,1$, $\frac{1}{c} = 196,2$, $\frac{1}{d} = 197,3$, $\frac{1}{e} = 198,4$, $\frac{1}{f} = 199,5$, $\frac{1}{g} = 200,6$, $\frac{1}{h} = 201,7$, $\frac{1}{i} = 202,8$, $\frac{1}{j} = 203,9$, $\frac{1}{k} = 204,0$, $\frac{1}{l} = 205,1$, $\frac{1}{m} = 206,2$, $\frac{1}{n} = 207,3$, $\frac{1}{o} = 208,4$, $\frac{1}{p} = 209,5$, $\frac{1}{q} = 210,6$, $\frac{1}{r} = 211,7$, $\frac{1}{s} = 212,8$, $\frac{1}{t} = 213,9$, $\frac{1}{u} = 214,0$, $\frac{1}{v} = 215,1$, $\frac{1}{w} = 216,2$, $\frac{1}{x} = 217,3$, $\frac{1}{y} = 218,4$, $\frac{1}{z} = 219,5$, $\frac{1}{a} = 220,6$, $\frac{1}{b} = 221,7$, $\frac{1}{c} = 222,8$, $\frac{1}{d} = 223,9$, $\frac{1}{e} = 224,0$, $\frac{1}{f} = 225,1$, $\frac{1}{g} = 226,2$, $\frac{1}{h} = 227,3$, $\frac{1}{i} = 228,4$, $\frac{1}{j} = 229,5$, $\frac{1}{k} = 230,6$, $\frac{1}{l} = 231,7$, $\frac{1}{m} = 232,8$, $\frac{1}{n} = 233,9$, $\frac{1}{o} = 234,0$, $\frac{1}{p} = 235,1$, $\frac{1}{q} = 236,2$, $\frac{1}{r} = 237,3$, $\frac{1}{s} = 238,4$, $\frac{1}{t} = 239,5$, $\frac{1}{u} = 240,6$, $\frac{1}{v} = 241,7$, $\frac{1}{w} = 242,8$, $\frac{1}{x} = 243,9$, $\frac{1}{y} = 244,0$, $\frac{1}{z} = 245,1$, $\frac{1}{a} = 246,2$, $\frac{1}{b} = 247,3$, $\frac{1}{c} = 248,4$, $\frac{1}{d} = 249,5$, $\frac{1}{e} = 250,6$, $\frac{1}{f} = 251,7$, $\frac{1}{g} = 252,8$, $\frac{1}{h} = 253,9$, $\frac{1}{i} = 254,0$, $\frac{1}{j} = 255,1$, $\frac{1}{k} = 256,2$, $\frac{1}{l} = 257,3$, $\frac{1}{m} = 258,4$, $\frac{1}{n} = 259,5$, $\frac{1}{o} = 260,6$, $\frac{1}{p} = 261,7$, $\frac{1}{q} = 262,8$, $\frac{1}{r} = 263,9$, $\frac{1}{s} = 264,0$, $\frac{1}{t} = 265,1$, $\frac{1}{u} = 266,2$, $\frac{1}{v} = 267,3$, $\frac{1}{w} = 268,4$, $\frac{1}{x} = 269,5$, $\frac{1}{y} = 270,6$, $\frac{1}{z} = 271,7$, $\frac{1}{a} = 272,8$, $\frac{1}{b} = 273,9$, $\frac{1}{c} = 274,0$, $\frac{1}{d} = 275,1$, $\frac{1}{e} = 276,2$, $\frac{1}{f} = 277,3$, $\frac{1}{g} = 278,4$, $\frac{1}{h} = 279,5$, $\frac{1}{i} = 280,6$, $\frac{1}{j} = 281,7$, $\frac{1}{k} = 282,8$, $\frac{1}{l} = 283,9$, $\frac{1}{m} = 284,0$, $\frac{1}{n} = 285,1$, $\frac{1}{o} = 286,2$, $\frac{1}{p} = 287,3$, $\frac{1}{q} = 288,4$, $\frac{1}{r} = 289,5$, $\frac{1}{s} = 290,6$, $\frac{1}{t} = 291,7$, $\frac{1}{u} = 292,8$, $\frac{1}{v} = 293,9$, $\frac{1}{w} = 294,0$, $\frac{1}{x} = 295,1$, $\frac{1}{y} = 296,2$, $\frac{1}{z} = 297,3$, $\frac{1}{a} = 298,4$, $\frac{1}{b} = 299,5$, $\frac{1}{c} = 300,6$, $\frac{1}{d} = 301,7$, $\frac{1}{e} = 302,8$, $\frac{1}{f} = 303,9$, $\frac{1}{g} = 304,0$, $\frac{1}{h} = 305,1$, $\frac{1}{i} = 306,2$, $\frac{1}{j} = 307,3$, $\frac{1}{k} = 308,4$, $\frac{1}{l} = 309,5$, $\frac{1}{m} = 310,6$, $\frac{1}{n} = 311,7$, $\frac{1}{o} = 312,8$, $\frac{1}{p} = 313,9$, $\frac{1}{q} = 314,0$, $\frac{1}{r} = 315,1$, $\frac{1}{s} = 316,2$, $\frac{1}{t} = 317,3$, $\frac{1}{u} = 318,4$, $\frac{1}{v} = 319,5$, $\frac{1}{w} = 320,6$, $\frac{1}{x} = 321,7$, $\frac{1}{y} = 322,8$, $\frac{1}{z} = 323,9$, $\frac{1}{a} = 324,0$, $\frac{1}{b} = 325,1$, $\frac{1}{c} = 326,2$, $\frac{1}{d} = 327,3$, $\frac{1}{e} = 328,4$, $\frac{1}{f} = 329,5$, $\frac{1}{g} = 330,6$, $\frac{1}{h} = 331,7$, $\frac{1}{i} = 332,8$, $\frac{1}{j} = 333,9$, $\frac{1}{k} = 334,0$, $\frac{1}{l} = 335,1$, $\frac{1}{m} = 336,2$, $\frac{1}{n} = 337,3$, $\frac{1}{o} = 338,4$, $\frac{1}{p} = 339,5$, $\frac{1}{q} = 340,6$, $\frac{1}{r} = 341,7$, $\frac{1}{s} = 342,8$, $\frac{1}{t} = 343,9$, $\frac{1}{u} = 344,0$, $\frac{1}{v} = 345,1$, $\frac{1}{w} = 346,2$, $\frac{1}{x} = 347,3$, $\frac{1}{y} = 348,4$, $\frac{1}{z} = 349,5$, $\frac{1}{a} = 350,6$, $\frac{1}{b} = 351,7$, $\frac{1}{c} = 352,8$, $\frac{1}{d} = 353,9$, $\frac{1}{e} = 354,0$, $\frac{1}{f} = 355,1$, $\frac{1}{g} = 356,2$, $\frac{1}{h} = 357,3$, $\frac{1}{i} = 358,4$, $\frac{1}{j} = 359,5$, $\frac{1}{k} = 360,6$, $\frac{1}{l} = 361,7$, $\frac{1}{m} = 362,8$, $\frac{1}{n} = 363,9$, $\frac{1}{o} = 364,0$, $\frac{1}{p} = 365,1$, $\frac{1}{q} = 366,2$, $\frac{1}{r} = 367,3$, $\frac{1}{s} = 368,4$, $\frac{1}{t} = 369,5$, $\frac{1}{u} = 370,6$, $\frac{1}{v} = 371,7$, $\frac{1}{w} = 372,8$, $\frac{1}{x} = 373,9$, $\frac{1}{y} = 374,0$, $\frac{1}{z} = 375,1$, $\frac{1}{a} = 376,2$, $\frac{1}{b} = 377,3$, $\frac{1}{c} = 378,4$, $\frac{1}{d} = 379,5$, $\frac{1}{e} = 380,6$, $\frac{1}{f} = 381,7$, $\frac{1}{g} = 382,8$, $\frac{1}{h} = 383,9$, $\frac{1}{i} = 384,0$, $\frac{1}{j} = 385,1$, $\frac{1}{k} = 386,2$, $\frac{1}{l} = 387,3$, $\frac{1}{m} = 388,4$, $\frac{1}{n} = 389,5$, $\frac{1}{o} = 390,6$, $\frac{1}{p} = 391,7$, $\frac{1}{q} = 392,8$, $\frac{1}{r} = 393,9$, $\frac{1}{s} = 394,0$, $\frac{1}{t} = 395,1$, $\frac{1}{u} = 396,2$, $\frac{1}{v} = 397,3$, $\frac{1}{w} = 398,4$, $\frac{1}{x} = 399,5$, $\frac{1}{y} = 400,6$, $\frac{1}{z} = 401,7$, $\frac{1}{a} = 402,8$, $\frac{1}{b} = 403,9$, $\frac{1}{c} = 404,0$, $\frac{1}{d} = 405,1$, $\frac{1}{e} = 406,2$, $\frac{1}{f} = 407,3$, $\frac{1}{g} = 408,4$, $\frac{1}{h} = 409,5$, $\frac{1}{i} = 410,6$, $\frac{1}{j} = 411,7$, $\frac{1}{k} = 412,8$, $\frac{1}{l} = 413,9$, $\frac{1}{m} = 414,0$, $\frac{1}{n} = 415,1$, $\frac{1}{o} = 416,2$, $\frac{1}{p} = 417,3$, $\frac{1}{q} = 418,4$, $\frac{1}{r} = 419,5$, $\frac{1}{s} = 420,6$, $\frac{1}{t} = 421,7$, $\frac{1}{u} = 422,8$, $\frac{1}{v} = 423,9$, $\frac{1}{w} = 424,0$, $\frac{1}{x} = 425,1$, $\frac{1}{y} = 426,2$, $\frac{1}{z} = 427,3$, $\frac{1}{a} = 428,4$, $\frac{1}{b} = 429,5$, $\frac{1}{c} = 430,6$, $\frac{1}{d} = 431,7$, $\frac{1}{e} = 432,8$, $\frac{1}{f} = 433,9$, $\frac{1}{g} = 434,0$, $\frac{1}{h} = 435,1$, $\frac{1}{i} = 436,2$, $\frac{1}{j} = 437,3$, $\frac{1}{k} = 438,4$, $\frac{1}{l} = 439,5$, $\frac{1}{m} = 440,6$, $\frac{1}{n} = 441,7$, $\frac{1}{o} = 442,8$, $\frac{1}{p} = 443,9$, $\frac{1}{q} = 444,0$, $\frac{1}{r} = 445,1$, $\frac{1}{s} = 446,2$, $\frac{1}{t} = 447,3$, $\frac{1}{u} = 448,4$, $\frac{1}{v} = 449,5$, $\frac{1}{w} = 450,6$, $\frac{1}{x} = 451,7$, $\frac{1}{y} = 452,8$, $\frac{1}{z} = 453,9$, $\frac{1}{a} = 454,0$, $\frac{1}{b} = 455,1$, $\frac{1}{c} = 456,2$, $\frac{1}{d} = 457,3$, $\frac{1}{e} = 458,4$, $\frac{1}{f} = 459,5$, $\frac{1}{g} = 460,6$, $\frac{1}{h} = 461,7$, $\frac{1}{i} = 462,8$, $\frac{1}{j} = 463,9$, $\frac{1}{k} = 464,0$, $\frac{1}{l} = 465,1$, $\frac{1}{m} = 466,2$, $\frac{1}{n} = 467,3$, $\frac{1}{o} = 468,4$, $\frac{1}{p} = 469,5$, $\frac{1}{q} = 470,6$, $\frac{1}{r} = 471,7$, $\frac{1}{s} = 472,8$, $\frac{1}{t} = 473,9$, $\frac{1}{u} = 474,0$, $\frac{1}{v} = 475,1$, $\frac{1}{w} = 476,2$, $\frac{1}{x} = 477,3$, $\frac{1}{y} = 478,4$, $\frac{1}{z} = 479,5$, $\frac{1}{a} = 480,6$, $\frac{1}{b} = 481,7$, $\frac{1}{c} = 482,8$, $\frac{1}{d} = 483,9$, $\frac{1}{e} = 484,0$, $\frac{1}{f} = 485,1$, $\frac{1}{g} = 486,2$, $\frac{1}{h} = 487,3$, $\frac{1}{i} = 488,4$, $\frac{1}{j} = 489,5$, $\frac{1}{k} = 490,6$, $\frac{1}{l} = 491,7$, $\frac{1}{m} = 492,8$, $\frac{1}{n} = 493,9$, $\frac{1}{o} = 494,0$, $\frac{1}{p} = 495,1$, $\frac{1}{q} = 496,2$, $\frac{1}{r} = 497,3$, $\frac{1}{s} = 498,4$, $\frac{1}{t} = 499,5$, $\frac{1}{u} = 500,6$, $\frac{1}{v} = 501,7$, $\frac{1}{w} = 502,8$, $\frac{1}{x} = 503,9$, $\frac{1}{y} = 504,0$, $\frac{1}{z} = 505,1$, $\frac{1}{a} = 506,2$, $\frac{1}{b} = 507,3$, $\frac{1}{c} = 508,4$, $\frac{1}{d} = 509,5$, $\frac{1}{e} = 510,6$, $\frac{1}{f} = 511,7$, $\frac{1}{g} = 512,8$, $\frac{1}{h} = 513,9$, $\frac{1}{i} = 514,0$, $\frac{1}{j} = 515,1$, $\frac{1}{k} = 516,2$, $\frac{1}{l} = 517,3$, $\frac{1}{m} = 518,4$, $\frac{1}{n} = 519,5$, $\frac{1}{o} = 520,6$, $\frac{1}{p} = 521,7$, $\frac{1}{q} = 522,8$, $\frac{1}{r} = 523,9$, $\frac{1}{s} = 524,0$, $\frac{1}{t} = 525,1$, $\frac{1}{u} = 526,2$, $\frac{1}{v} = 527,3$, $\frac{1}{w} = 528,4$, $\frac{1}{x} = 529,5$, $\frac{1}{y} = 530,6$, $\frac{1}{z} = 531,7$, $\frac{1}{a} = 532,8$, $\frac{1}{b} = 533,9$, $\frac{1}{c} = 534,0$, $\frac{1}{d} = 535,1$, $\frac{1}{e} = 536,2$, $\frac{1}{f} = 537,3$, $\frac{1}{g} = 538,4$, $\frac{1}{h} = 539,5$, $\frac{1}{i} = 540,6$, $\frac{1}{j} = 541,7$, $\frac{1}{k} = 542,8$, $\frac{1}{l} = 543,9$, $\frac{1}{m} = 544,0$, $\frac{1}{n} = 545,1$, $\frac{1}{o} = 546,2$, $\frac{1}{p} = 547,3$, $\frac{1}{q} = 548,4$, $\frac{1}{r} = 549,5$, $\frac{1}{s} = 550,6$, $\frac{1}{t} = 551,7$, $\frac{1}{u} = 552,8$, $\frac{1}{v} = 553,9$, $\frac{1}{w} = 554,0$, $\frac{1}{x} = 555,1$, $\frac{1}{y} = 556,2$, $\frac{1}{z} = 557,3$, $\frac{1}{a} = 558,4$, $\frac{1}{b} = 559,5$, $\frac{1}{c} = 560,6$, $\frac{1}{d} = 561,7$, $\frac{1}{e} = 562,8$, $\frac{1}{f} = 563,9$, $\frac{1}{g} = 564,0$, $\frac{1}{h} = 565,1$, $\frac{1}{i} = 566,2$, $\frac{1}{j} = 567,3$, $\frac{1}{k} = 568,4$, $\frac{1}{l} = 569,5$, $\frac{1}{m} = 570,6$, $\frac{1}{n} = 571,7$, $\frac{1}{o} = 572,8$, $\frac{1}{p} = 573,9$, $\frac{1}{q} = 574,0$, $\frac{1}{r} = 575,1$, $\frac{1}{s} = 576,2$, $\frac{1}{t} = 577,3$, $\frac{1}{u} = 578,4$, $\frac{1}{v} = 579,5$, $\frac{1}{w} = 580,6$, $\frac{1}{x} = 581,7$, $\frac{1}{y} = 582,8$, $\frac{1}{z} = 583,9$, $\frac{1}{a} = 584,0$, $\frac{1}{b} = 585,1$, $\frac{1}{c} = 586,2$, $\frac{1}{d} = 587,3$, $\frac{1}{e} = 588,4$, $\frac{1}{f} = 589,5$, $\frac{1}{g} = 590,6$, $\frac{1}{h} = 591,7$, $\frac{1}{i} = 592,8$, $\frac{1}{j} = 593,9$, $\frac{1}{k} = 594,0$, $\frac{1}{l} = 595,1$, $\frac{1}{m} = 596,2$, $\frac{1}{n} = 597,3$, $\frac{1}{o} = 598,4$, $\frac{1}{p} = 599,5$, $\frac{1}{q} = 600,6$, $\frac{1}{r} = 601,7$, $\frac{1}{s} = 602,8$, $\frac{1}{t} = 603,9$, $\frac{1}{u} = 604,0$, $\frac{1}{v} = 605,1$, $\frac{1}{w} = 606,2$, $\frac{1}{x} = 607,3$, $\frac{1}{y} = 608,4$, $\frac{1}{z} = 609,5$, $\frac{1}{a} = 610,6$, $\frac{1}{b} = 611,7$, $\frac{1}{c} = 612,8$, $\frac{1}{d} = 613,9$, $\frac{1}{e} = 614,0$, $\frac{1}{f} = 615,1$, $\frac{1}{g} = 616,2$, $\frac{1}{h} = 617,3$, $\frac{1}{i} = 618,4$, $\frac{1}{j} = 619,5$, $\frac{1}{k} = 620,6$, $\frac{1}{l} = 621,7$, $\frac{1}{m} = 622,8$, $\frac{1}{n} = 623,9$, $\frac{1}{o} = 624,0$, $\frac{1}{p} = 625,1$, $\frac{1}{q} = 626,2$, $\frac{1}{r} = 627,3$, $\frac{1}{s} = 628,4$, $\frac{1}{t} = 629,5$, $\frac{1}{u} = 630,6$, $\frac{1}{v} = 631,7$, $\frac{1}{w} = 632,8$, $\frac{1}{x} = 633,9$, $\frac{1}{y} = 634,0$, $\frac{1}{z} = 635,1$, $\frac{1}{a} = 636,2$, $\frac{1}{b} = 637,3$, $\frac{1}{c} = 638,4$, $\frac{1}{d} = 639,5$, $\frac{1}{e} = 640,6$, $\frac{1}{f} = 641,7$, $\frac{1}{g} = 642,8$, $\frac{1}{h} = 643,9$, $\$

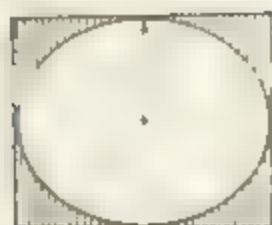


Fig. V 3

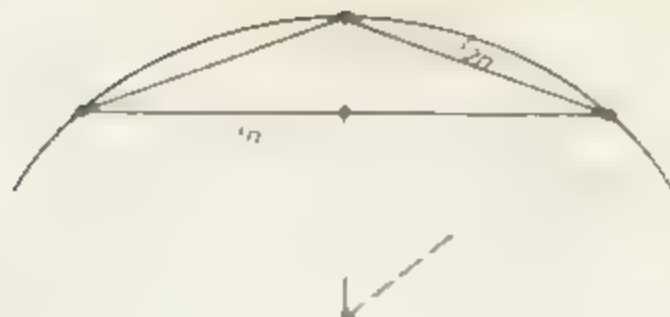


Fig. V 4

11) Simplificați :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$$

12) Calculați $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$ și $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} dx$

13) Calculați $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$ și $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} dx$

14) Octonul regulat înscris în cercul de rază 1

14*) Fie l , lungimea laturii poligonului regulat înscris în cercul de rază 1. Alina a scris funcție de l , (vezi figura 4).

15) Pentru $x \in (0, \pi/2)$, calculați $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\cos 2t}} dt$ și $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2t}} dt$. Se știe că raza medie a Pământului este de 6 300 km.

16) Calculați $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$ și $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} dx$

17) Calculați $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$ și $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} dx$

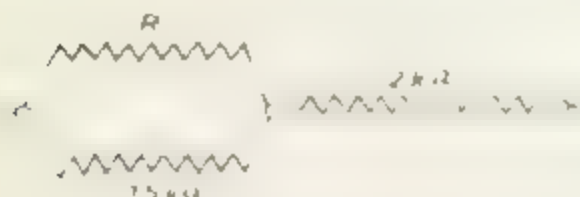


Fig. V 5

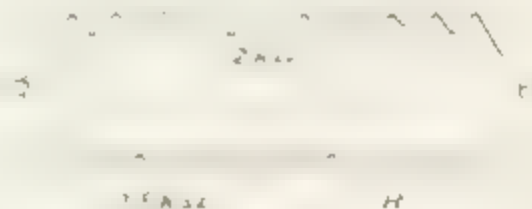


Fig. V 6

18) Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} 6751x + 3249y = 26751 \\ 3249x + 6751y = 23249 \end{cases}$$

19) x este valoarea parametrului m astfel încât 1 să fie soluție a ecuației :

$$x^2 + mx + m = 1$$

20) Rezolvați ecuația :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{3x-3} - \frac{1}{6x-6} = 0$$

21) Aflați valoarea parametrului a astfel încât ecuația $(4-x)^2 - ax = \frac{12}{x} - 6$ să aibă soluții.

22) Împărțind numarul a cu 113 obținem citul 5 și restul 1. Împărțind numarul a cu 108 citul este din nou 5, dar restul este 41. Aflați numerele a și c .

23) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. Se știe că a mărimea $f(x)$ este unghiul $\theta(x)$ în ΔABC unde $\angle C = 90^\circ$ și $\angle A = 2\angle B$. Dacă $f(x)$ este direct proporțional cu $\sin \theta(x)$, găsiți valoarea lui $f(4)$. Se știe că $f(4) = 12$. Se reprezintă grafic funcția $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ care este dependentă de unghiul $\theta(x)$. Care este valoarea lui $f(4)$?

24) Două automobile pleacă din orașul A spre orașul B. Prima pleacă la ora 8:00 și merge cu viteza de 40 km/h. A doua pleacă la ora 9:00 și merge cu viteza de 60 km/h. La ce distanță de A se întâlnesc? Expresați distanța dintre cele două automobile în funcție de t (unde t este timpul în ore). Care este momentul în care cele două automobile se întâlnesc? (Pentru a afla distanța dintre orașele A și B, presupuneți că cele două automobile pleacă din B pentru a ajunge la destinație).

25) Care număr trebuie adăugat împreună cu 15, 21 și 8 astfel încât să obținem o medie aritmetică cu 1,5?

26) Determinați variabilele m și n astfel încât polinoamele $P(X) = 3X^3 + 5X^2 + 4X + 1$ și $Q(X, Y) = -X^2Y + 3XY^2 + 2X + nXY + m$ au aceeași formă canonică.

27) Fie $P(X) = 4X^3 - 3X^2 - 2X + 1$. Calculați $P(2)$. Descompuneți în factori.

28) Fie date polinoamele $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ și $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 4X + 1$. Determinați valoarea lui a astfel încât $P(2) = Q(2)$.

29) Arătați că polinomul $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ se divide cu $X^2 + 1$ în $\mathbb{Z}[X]$. Puteți afla citul?

30) Arătați că $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ este divizibil cu $X^2 + 1$ în $\mathbb{Z}[X]$. Este pătratul unui binom?

31) Determinați a, b, c știind că polinomul :

$$P(X) = 2X(aX + b) + 3X(bX + c) + (X + 1) = 2X^2 + 6X + 1$$

32) Determinați a, b, c astfel încât polinomul $P(X) = 1X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ să poată fi scris sub forma $P(X) = (3X^2 + 1)(aX^2 + bX + c)$.

33) Descompuneți în factori polinoamele $P(X) = 2X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ și $Q(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 1$. Apoi polinomul $S(X) = P(X) + Q(X)$.

34) Descompuneți în factori polinomul $X^3 - 6X^2Y + 12XY^2 - 8Y^3$.

35) Descompuneți în factori $P(X, Y) = X^2 + XY + 2Y + 4$.

36) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $P(X) = (X^3 - 5X^2 + 4X)(X^2 + 7X + 12)$.

37) Fie polinoamele $P(X) = X^3 + 4X^2 + 3X + 1$ și $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 4X + 1$. Determinați valoarea lui a astfel încât cel mai mare divizor comun a polinoamelor P și Q să fie un polinom de grad 1. Am putea cere ca acest cel mai mare divizor comun să fie de grad 1?

38) Pentru ce valori ale lui a și b rinomul $X^3 + aX^2 + bX + 1$ este produsul a trei binomiale de grad 1? a) $X - 12$, b) $X + 4$ și $X + 5$ și $X - 5$?

39) Simplificați fracțiile raționale

$$a) \frac{5X^2 - 4X - 1}{5X - 5}; \quad b) \frac{Y^2 - 2Y - 3}{Y^2 - 4}; \quad c) \frac{5Y + 10}{(Y + 2)(Y - 3)}; \quad d) \frac{5X^2 - 11X + 2}{X^2 - 2}$$

40) Simplificați:

a) $\frac{6XZ - 4YZ - 2XZ - 4Y}{3X - 2Y}$; b) $\frac{XY - X}{XY - X}$

c) $\frac{2X^2 + 16X - 18}{Y^2 + 5Y - 6}$; d) $\frac{X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X - 12}{X^3 - 4X - X - 6}$

41) Simplificați:

a) $\frac{(X - 1)(X - 3)}{(X - 1)(X - 4) - 2}$; b) $\frac{(X - 1)(X - 3)}{(X - 1)(X - 4) - 2}$

42) Efectuați:

a) $\frac{1}{(X - 2)} - \frac{1}{(X - 2)}$; b) $\frac{2X}{X - 2} - \frac{4}{X - 2}$; c) $\frac{2X - Y}{X - 2} - \frac{1}{X - 2}$

d) $\frac{X + 1}{XY} - \frac{X}{XY - Y^2} - \frac{1}{XY + X^2}$; e) $\frac{X - 1}{YZ} + \frac{X - 1}{XZ} - \frac{X - 1}{XZ}$

43) Efectuați înmulțirile:

a) $\frac{2X + 1}{X + 1} \cdot \frac{1 - X}{1 - 4X^2}$; b) $\frac{6X - 2^2}{(2X - 3)^2} \cdot \frac{(X - 2)}{4X - 8}$; c) $\frac{(X - 1)^2}{2X - 1} \cdot \frac{(X - 1)}{10X - 15}$

44) Efectuați împărțirile:

a) $\frac{(X - 4)}{X} : \frac{(X - 3)}{X}$; b) $\frac{(X - 1)}{(X - 2)} : \frac{(X - 1)}{(X - 2)}$ $\left(\frac{(X - 1)}{(X - 2)} \right) \left(\frac{(X - 1)}{(X - 2)} \right)$

45) Scrieți ca fracție rațională, apoi simplificați:

a) $\frac{(2X + 5)(X + 2)}{16X^2 - 9}$; b) $\frac{X + 1}{X - 1} - 1$; c) $\frac{1}{X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X}$

d) $\frac{1}{1 + \frac{1}{X + 1}}$

46) Dacă $2X^2 + 3X - 5 = (X - a)(2X - b)$, atunci: a) $a = -1, b = -1$; b) $a = 1, b = -5$; c) $a = 1, b = -5$. Cum este corect?

47) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - 0.4x - 0.12 = 0$; b) $3x^2 - 25x - 12 = 0$; c) $(x - 1)^2 - 2x^2 - 3x - 6 = 0$; d) $8x^2 - 6x - 1 = 0$

48) Fie polinomul $A = 3X^2 - 2X$. Putem găsi un număr a și un număr b astfel încât $aX + b$ să fie egal cu A ?

49) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are ca soluții pe:

a) $\frac{3}{4}$ și $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$; c) $\frac{2}{11}$ și $\frac{9}{11}$; d) $4 + \sqrt{17}$ și $4 - \sqrt{17}$

50) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are soluțiile:

a) $a + b$ și $a - b$; b) $a + b$ și $\frac{a + b}{a + b}$; c) $\frac{a + b}{a}$ și $\frac{a - b}{b}$

51) E ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ despre care știm că are rădăcini reale și distincte, atunci II-lea ce are ca soluții pe: a) $x_1 + x_2$; b) $2x_1 + 2x_2$

52) În ecuația $x^2 + mx + 6 = 0$ determină pe m astfel încât să avem două rădăcini reale și distincte.

16) Directorul unei întreprinderi află de existența a două inovații și va determina creșterea productivității muncii cu 10% iar a doua cu 20%. Directorul apreciază că prin aplicarea simultană celor două inovații productivitatea muncii va crește

Cu cât va crește productivitatea muncii ?

17) Două cercuri exterioare una altuia sunt situate în interiorul unui altfel de cerc mic mare. Fiecare dintre aceste cercuri este tangent cu toate două iar cele trei centre sunt pe o dreaptă. Aflați aria interioară cercului mare dar exterioară celor două cercuri mici. Știți că aria totală a celor două cercuri mici

18) Găsiți o funcție h și scrieți graficul să fie $\text{sgn}(\cos x) = 1$ unde $40^\circ < x < 180^\circ$

19) Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = c$ este isoscel

20) Calculați $(1^3 - 1) + (1^3 - 1) + (1^3 - 1) + \dots + (1^3 - 1) + (1^3 - 1) + (1^3 - 1)$

21) Descompuneți în factori polinomul

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

22) Efectuați :

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

23) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de $f(x) = x$. Arătați că oricare a, b numere reale, avem

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

24) Știm că $5a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$. Aflați raportul $\frac{a}{b}$.

25*) Demonstrați că dintre toate dreptunghiurile cu aceleași perimetri, pătratul are cea mai mare

26) Un poligon are 4850 de diagonale. Câte laturi are poligonul ?

27) Rezolvați sistemele :

$$a) \begin{cases} x + y = 0.7 \\ x - y = 0.5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

28*) Pe ecranul unui automat de examinare a cunoștințelor apar 5 întrebări la care trebuie să răspundă prin da sau nu. Știm că a) prima și a doua întrebare au răspunsurile contrare b) a doua și a patra au același răspuns c) sau prima sau a doua întrebare are răspunsul da d) dacă răspunsul la a patra este da atunci răspunsul la a cincea întrebare este nu e) a treia întrebare răspunsul este da f) răspunsurile trebuie să scrie lămură pentru a bi se cunosc

2. PROBLEME DEOSERBITE SI CURIOZITATI

1) Priviți

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{x^2} = 49 + 50 + 60$$

$$74 + 25 + \frac{7}{6} + \frac{9}{18} = 100$$

Puteți scrie numărul 100 folosind la fel ca mai sus, doar o singură dată pe fiecare număr și scriere să apară și radicali ?

2) Fie numerele naturale impare 1, 3, 5, 7, 9. Calculați suma lor: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Apoi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$. Scrieți și suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, fără a efectua adunările ?

3) Priviți: $1^2 = 1$,

$$3^2 = 2 + 3 + 4,$$

$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Puteți continua ? Completați: $19^2 = \dots$. Care este cel mai mic termen al sumei din membrul drept ? Dar cel mai mare ?

4) Arătați că

$$= \sqrt{12} + \sqrt{28} + \sqrt{44} + \sqrt{60} + \sqrt{78} + \sqrt{96} + \sqrt{112} + \sqrt{132} + \sqrt{156} + \sqrt{180} + \sqrt{208} + \sqrt{232} + \sqrt{260} + \sqrt{288} + \sqrt{312} + \sqrt{342} + \sqrt{368} + \sqrt{396} + \sqrt{420} + \sqrt{448} + \sqrt{472} + \sqrt{500} + \sqrt{528} + \sqrt{552} + \sqrt{578} + \sqrt{600} + \sqrt{624} + \sqrt{648} + \sqrt{672} + \sqrt{696} + \sqrt{720} + \sqrt{744} + \sqrt{768} + \sqrt{792} + \sqrt{816} + \sqrt{840} + \sqrt{864} + \sqrt{888} + \sqrt{912} + \sqrt{936} + \sqrt{960} + \sqrt{984} + \sqrt{1000}$$

5) Este adevărat că $\sqrt{10} + \sqrt{10} \approx \sqrt{20}$ aproximativ $\sqrt{20} = 4.472135955$. Dar cu eroare de cel mult 0,001 ?

6) Fie egalitatea $a = b$. Deci $a^2 = ab$, de unde

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Descompunem cei doi membri în factori:

$$(a + b)(a - b) = (a - b)b$$

de unde $a + b = b$ sau (prin adunând că $a - b = b - b = 0$). Așadar $a = 0$ sau $b = 0$ (presupunând că $a \neq 0$ și $b \neq 0$).

7) Verificați că $4 - 2 + 2 - \frac{5}{2} + 9 - 2 + 3 - \frac{5}{2} = 10$. Completați cu numere întregi și fracții, sau perfect :

$$2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 + \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Așadar

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

de unde $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$, adică $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Unde este greșeala ?

8) Care număr este mai mare

a) 2^{2^2} , $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{2^2}}$ sau 2222 ,

b) 9^{9^9} , 9^{9^9} , 99^9 sau 999 ?

9) Priviți :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx + cz)^2 + (bz - cy + ax)^2 + (cx - az + by)^2$$

Puteți scrie produsul $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + v^2)$ ca sumă de pătrate ? Dar de patru pătrate ?

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Rezolvați ecuația $k^2 - 2k + \sqrt{k} - k + 2 = 0$.

11) Arătați că dacă $x + y = 2$, atunci $x^2 + y^2 > 2$ și $x^4 + y^4 > 2$

12) Către forma are polinoamelor ale căror rădăcini sunt punctele de intersecție ale dreptelor

$$x + y - 2 = 0, x - y - 2 = 0, x + y - 2 = 0, y - x + y + 2 = 0.$$

13) Descompuneți în factori

$$2a^2 + ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2$$

4) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

5) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

6) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

7) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

8) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

9) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

10) (Dacă $x + y + z = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, unde $p = x + y + z = 0$, $q = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $r = xyz$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, atunci x, y, z sunt rădăcinile ecuației $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$.)

4. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI

Textele problemelor au fost parțial modificate

1) Se consideră ecuația $x^3 - 4x^2 + 3x - a = 0$ și $x^3 - 4x^2 + 3x - a = 0$ unde a este un număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile au o soluție comună?

(Olimpiada 1973)

2) Se dau polinoamele $P(X) = 2X^2 - 3X + 1$ și $Q(X) = X^2 - 2X + 1$, în care coeficienții a, b și c sînt numere reale.
 a) Determinați a, b și c astfel încît $P(X) = aQ(X) + bX + c$.
 b) Pentru $a = 2, b = 3$ și $c = 1$, descompuneți polinomul în factori, determinați apoi rădăcinile sale (cu care fracția $\frac{P(X)}{Q(X)}$ este ireductibilă).

(Olimpiada 1974, jud. Iași)

3) Arătați că polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ se divide cu $X^2 + aX + b$ numai dacă $c = 0$.
 (Olimpiada 1974, mun. București)

4) Arătați că polinomul $X^3 + aX^2 + bX + c$ se divide cu $X^2 + aX + b$ numai dacă $c = 0$.
 (Olimpiada 1974, mun. București)

5) Fie polinomul $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + X + 1$.
 a) Aflați citul și restul împărțirii lui $P(X)$ la $2X^2 + X$.
 b) Pentru $a = 1$ și $b = 1$, descompuneți polinomul în factori.
 (Olimpiada 1975, mun. București)

6) Fie ecuația $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}$. Care dintre numerele $\sin 2^\circ, 1 + \sqrt{2}, 4 \sin 10^\circ$ sînt soluții ale ecuației?
 (Olimpiada 1975, mun. București)

7) Se dau numerele x și y astfel încît $x^2 + y^2 = k$. atunci cea mai mare valoare a produsului xy este $\frac{k}{4}$. În aceeași condiție, arătați că cea mai mică valoare a lui $x^2 + y^2$ este $\frac{k}{2}$.
 (Olimpiada 1975)

8) Arătați că dacă $x + y = 1$ și $x^2 + y^2 = p$, atunci $x^4 + y^4 = 1 - 2p + x^2 + y^2 = (x^2 - 1/2)^2 + 3/4$.
 (Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

9) Se dă fracția $\frac{P(X)}{Q(X)}$ în care $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ și $Q(X) = X^2 + dX + e$.
 a) Arătați că $P(X) = 2Q(X) + \frac{6}{X+1}$.
 b) Pentru ce numere reale x fracția este definită în x ?
 (Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

10. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 2X^2 - 8$.
 a) Aflați citul și restul împărțirii lui $P(X)$ la $X^2 + 1$.
 b) Pentru $a = 1$ și $b = 1$, descompuneți polinomul în factori.
 (Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

11) Dacă polinomul $X^3 + 4aX^2 + 6bX + 4cX + 1$ este divizibil cu $X^2 + cX + 3/X + 1$ arătați că primul este un pătrat, iar al doilea cubul unui binom

(Concurs treaptă 1976, mun. București)

12) Pentru ce valori ale lui a, b, c polinomul $P(X) = 2X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$ este descompus $P(X) = (3X + 1)(X^2 + X + 1)^2$ $\forall X \in \mathbb{C}$

(Concurs treaptă 1976, mun. București)

13) Descompuneți în factori $(X + Y + Z - X^2 - Y^2 - Z^2)$

(Concurs treaptă 1976, jud. Constanța)

14) Fie $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + 1$, $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$, $R(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ unde $a + b + c \neq 0$ și $abc \neq 0$

a) Arătați că $P(X), Q(X), R(X)$ sunt polinoame care se împart la $X^2 + X + 1$

b) Arătați că polinomul $P(X) + Q(X) + 2R(X)$ se divide cu $X + 1$

c) Arătați că polinomul $P(X) + Q(X) + R(X)$ nu se divide cu $X + 1$

(Olimpiada 1977, mun. București)

15) Rezolvați ecuațiile a) $9x^2 + 16x - \frac{13}{3} = 0$, b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0$ ($x \neq \pm 1, b \neq 0$)

(Concurs treaptă 1977, jud. Dolj)

16) Rezolvați ecuația

$$\frac{x^2 + 1}{x-1} + \frac{x^2 + 1}{x+1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Arad)

17) a) Arătați că polinomul $P(X) = X^4 - X^3 + 6X^2 + 4X + 8$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X + 2$ și $R(X) = X + 2$

b) Folosind eventual rezultatul de la a), simplificați fracția

$$\frac{P(X)}{Q(X) \cdot R(X)}$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Neamț)

18) Reprezentați grafic funcția $f(x) = x^2 - 4x + 4$ și pe $g(x) = x^2 - 4x + 4$ de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata

(Concurs treaptă 1977, jud. Vaslui)

19) Simplificați fracția

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

20) Fie ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Determinați valoarea lui m astfel încât ecuația să admită singură soluție.

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

21) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, descrisă de

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{pentru } x \in (-\infty, 1), \\ -2x + 1 & \text{pentru } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

22) Rezolvați sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{2x - 3y}{5} - \frac{2y - 3x}{11} = \frac{112}{55}, \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48 \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

23) Rezolvați sistemul de inecuații

$$\begin{cases} 2x < 4x - 6, \\ 4x + 7 < 3x + 1 \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, jud. Prahova)

24) Se dă ecuația

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2 + 1} = \frac{1}{a}$$

a) Pentru ce valoare a lui a ecuația are soluția 4?

b) Pentru ce valoare a lui x ecuația în a are soluția 5?

(Concurs treaptă 1979, jud. Constanța)

25) Fie f și g două funcții liniare

a) Determinați funcțiile, știind că

$$2f(x + 1) + g(x - 1) = 2x + 14$$

$$\text{și } f(x + 1) - 2g(x - 1) = 6x - 18 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

b) Reprezentați grafic funcțiile $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$, apoi aflați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice

(Concurs treaptă 1979, jud. Arad)

26) Fie polinomul $P(X) = X^3 - 3X^2 - 2$, $Q(X) = X^3 - 3X + 2$. Arătați că $P(Q(X))$ se divide cu $X^3 + 3X + 1$.

(Olimpiada 1977, jud. Dolj)

27) Se știu polinomii $P(X) = X^3 - mX^2 + nX - p$, $Q(X) = X^3 - nX^2 + pX - m$. Determinați m, n, p astfel încât $P(X)$ să se dividă cu $X - 1$, $X - 2$ și $X - 3$, apoi rezolvați ecuația $P(x) = 0$.

(Olimpiada 1979, jud. Timiș)

28) Un triunghi isoscel are perimetrul de 160 m iar baza este cu 20 m mai mică decât oricare dintre laturile egale. Aflați lungimile laturilor

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

29) Determinați numerele m și n astfel încât polinomul $2X^4 + mX^3 + nX^2 + 2$ să dea restul 4 prin împărțirea la $X + 2$.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

30) Numerele reale a, b, c și x, y, z verifică relațiile $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $a + b + c = x + y + z$. Ce relație există între x și z ?

(Olimpiada 1979, mun. București)

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 3. $c) 6$, $d) 5^2$ (1 kg), $e) 2^{25} = 3.64 \cdot 10^2 = 364$, $f) 0.7$, $g) 26$, $h) 4.958$

Pag. 4. Suma diferă cu $\frac{1}{2}$ de puterea 2^a ; $d) a$; Suma diferă cu $\left(\frac{1}{2}\right)^a$ de 2; $b)$ Suma diferă cu $\left(\frac{1}{2}\right)^a$ de 2. Puteți generaliza?

Pag. 5. $d)$ Nu este adevărată dacă $a < 1$.

Pag. 6. $a) 3^{10}$, $b) 9^4$, $c) \left(-\frac{1}{3}\right)^4$; $e) 8^6$, $f) \left(-\frac{2}{3}\right)^6$.

Pag. 7. $a) 5$, $b) 1$, $c) \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$, $d) 3$, $e) 1.771561$, $f) 6.75$, $g) 240$,
 $d) 91,125$

Pag. 8. $a) 5$, $b) 1$, $c) 1000$, $d) 2$, $e) 3$, $f) 2$, $g) a)$ 12.550 lei (1), $b)$ 12.550625

lei (2), $c) a) 8$, $b) 8$, $c) 8$, $d) 8$, $e) a^2$, $f) 2$. Nu. Are valoarea $\frac{2^x}{8} = 3.375$ ori mai mare

$10)$ 904 kg (1)

Pag. 10. $b) \frac{9}{16}$; $c) 1944$.

Pag. 11. $a)$ Suma $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ are proprietatea că $\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} = 1$. Dar $\frac{5}{4}$ multiplicat cu $\frac{5}{4}$ are proprietatea că $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$ (1).

$a) 4$, $b) 9$, $c) 2x$, $d) 25$

Pag. 12. $a) 5.2$, $b) 1$, $c) 6.75$, $d)$ Doar trei, dacă $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z) a) \left(\frac{2}{3}\right)^4$,
 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

Pag. 13. $a) 5 \cdot 10^{-4}$, $b) 3 \cdot 10^{-5}$, $d) 3 \cdot 7^{-4}$, $e) 14 \cdot 5^{-4}$.

Pag. 14. $a) 4^2$, $b) 1$, $c) 0.69$, $d) 0.365$, $e) 0.12$, $f) a) 0.1$, $b) 0.54$, $c) 4$, $d) 318274$
 10^6 , $5)$ Aproximativ de 335000 ori, $6)$ 520 secunde

Pag. 16. 2) $a = a - a + 1 \neq 1$ da, dacă presupunem că $a \leq b$ 5) d) $[a, a+2]$, e) $[a-1, a+1]$
 6) e) $a = 1$ 7) $a = 1$ 8) dacă $a = 1$ nu are sens să scriem $[a, a]$

3) a) $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ b) $X = \{2\}$ sau $X = \{2, 3\}$ sau $X = \{3\} = \{3, 3\}$ 9) $a = 5$ și $b = 9$

Pag. 17. 1) $a = 1$ și $b = 1$ 2) $a = 2, 3$ și $b = 4, 5$ 3) $a = 1$ și $b = 0$ sau $a = 1$ și $b = 1$
 $a < b$ și $b > 0$ rezultă $ab < b$

Pag. 18. 3) Doar d) este falsă 4) a) $[2, 4]$; b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$ 13) c) $d \in (-1, 3]$; e)
 $(1, 3, 4, 2)$ 6) Intervalul semideschis $[5, 9)$

Pag. 19. 1) În acest caz $a = b$ 2) Intersecția este $a = 1$ 3) $a = 1$ și $b = 1$
 $a = 1$ și $b = 1$

Pag. 19. 1) Nu, deoarece $|x| = 0; 2,13$ și $-2,13$ 2) a) $[-4, 4]$, b) $(2, 4)$ 3) $(0, 2) \cup (0,9, 1,1)$
 $\supset (0,09, 1,01) \supset (0,009, 1,001) \supset 1$

Pag. 22. 1) $0,28571$ poate fi aproximată de exemplu pe $x = 0,285$ pe $x = 0,286$ sau pe $x = 0,2855$
 2) nu nu e rădăcină 3) a) $x = 5,1$ sau $x = 5,5$ 4) De exemplu media aritmetică $3,235$ 5) Căci $3,235$ este media aritmetică $3,2355$. Dacă $x = 3,2355$ atunci $3,226$ aproximată pe x în baza 10 este $3,226$
 $3,245$ și aproximată pe $x = x$, între 27 și 33 mil. 6) $P = \frac{18}{100} = 0,18$ 139

Pag. 24. 1) da, nu 3) Corect e!

Pag. 26. 1) a) $0,3$, b) $7,2$, c) $3,33 \dots$, d) $-2,89$ 2) $m \neq 10$, nu 3) Ecuația are ca soluție
 orice număr real 4) O singură soluție: $1,472$ 5) e) $\frac{2}{17}$; f) -2 , g) 0 , h) $\frac{11}{15}$ 6) d) Dacă $m \neq 0$,
 o singură soluție $\frac{a}{m}$ dacă $m = 0$ și $a \neq 0$, nici o soluție, dacă $a = m = 0$, orice număr real este
 soluție 7) Pentru $a = 1$

Pag. 27. 2) Sînt concurente

Pag. 29. 1) c) $x = 0,5$, $y = 0,2$; 2) d) $x = 1$, $y = 1$ e) Soluția este $(5,$
 $0) \left(\frac{27}{14}; -\frac{19}{14} \right)$

3) a) $\begin{pmatrix} 47 & 7 \\ 35 & 22 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ c) $(-4, 0, 5)$ și $(0, 2, 5)$

Pag. 31. 1) c) $\begin{pmatrix} 60 & 22 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$; e) $x = \frac{609}{590}$, $y = \frac{1117}{1770}$ 2) $a = 2,25$ și $b = 1,5$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) $(3, 6)$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

Pag. 33. 1) a) $x = 5$, $y = 1$ și $z = 17$ b) $(8, 12, 10)$ și $(5, 5, 8)$ 2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 3) $(9, 9, 6)$

Pag. 36. 1) 20,5 m; 24,5 m; 27,5 m; 2) 12,5 cm; 22,5 cm; 3) BAF și BP au lungimea $a = \frac{b+c}{2}$; 4) 253 kg; 14 kg; 5) 81; 16; 3; 6) 45; 15 respectiv 51 m pe minut, la 33 a m; 20 sec; 100 min respectiv 300 min

Pag. 38. 2) Nu. De exemplu, $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

Pag. 38. 1) a) 5 | 30; b) 4 | 10; c) a = 21; d) a = 2; e) a = 2b; deoarece 0 < b

h) 5a, 2a deoarece a = 0 < 5, a) 30 | 2 = 1500; b) c < 6; a) 3; f) $\frac{3}{4}$; c) \sqrt{ab}

Pag. 40. 2) a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{7 + \sqrt{21}}{7}$; c) $\frac{12\sqrt{3}}{6} - \frac{8\sqrt{10}}{6}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; e) $\sqrt{2} - 1$.

f) 2; 13; g) 2; 13; h) $\frac{28 + 7\sqrt{2}}{45}$; 4. Se aplică formula lui Newton pentru a calcula $\sqrt{2}$ și se folosește apoi tabelul. Rezultat 9.65

Pag. 41. 2) i) 5a; ii) $a^2 - 8ab - 2a - 9$ (a - b) | a - b; iii) $\frac{a}{a} - \frac{b}{b} = 1 - 1 = 0$; 4

f) $\sqrt{a^2 - ab - ab - b^2} = \sqrt{a^2 - 2ab - b^2} = \sqrt{(a - b)^2 - 4ab}$

Pag. 42. 1) $2 + \sqrt{4} = 4$; 2) a) este pozitiv sau b este negativ dar au pătratele egale. Deci $a = -b$; 4) a) Soluția este $x = 12$, $y = 1$; b) Soluția $x = \sqrt{2}$, $y = -1$

Pag. 47. 8) Doar f și g

Pag. 50. 1) a = 5; 6. Către cele sunt drepte paralele; 6. Către cele sunt semidrepte

8) a) $f(x) = 14x - 24$; b) $g(x) = 2x + 2$; Nu; 9) a) $T = 20 + \frac{1}{3-5} (a - 2)$ unde a în metri iar T temperatura în °C

Pag. 53. 5) $g(x) = 2x^2 - 4x$; 6) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; 8) Nu.

Pag. 56. 4) b) 44 ohm

Pag. 57. 3) $X^4 - X^3 - X^2 - 2X + 4$

Pag. 58. 1) a) $-4X^3$; b) $-\frac{3}{2}X^2$; c) $5X^4$.

Pag. 60. 1) a) $X^4 - 2X + \frac{2}{3}$; b) $-3X^4 + \frac{5}{2}X^3 - 2X$

2) a) Către $X = 2$ restul 1; b) Către $3X = 9$ restul 47; Restul 0; 2) a) Către $X = 1$ restul 2; b) Către $X = X + 1$ restul 5; Către la prima împărțire este împărțitor la cel divizat; 8) a) $X = 13$; b) $5X + 23$; c) Către $2X = 4$ restul 4; d) $X + 2$; 9) a) 6; b) 18; b) $-6XY + 2X^2$

Pag. 63. 1) a) Nu; b) da; c) da; d) nu; e) da; f) da; 3) m = 44

Pag. 78. 2) a) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{18x(x-1)}{x+y}$

Pag. 80. 2) a) 1, b) $\frac{1}{2}$, c) -2, d) -5, e) 0

Pag. 82. 2) a) 5, b) $\frac{x}{x+1}$, c) $\frac{2}{x+1}$

Pag. 85

Pag. 86. 2) a) 0, b)

Pag. 90. 3) b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, c) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, d) a) $3x(x+1)$, e) $\frac{x}{(x+1)(x^2-1)}$

pe cel posibil !

Pag. 93. 3) Toate 5) b) Nici o valoare

Pag. 96

a = 0 a ≠ 0 9) Obținem ecuația $|2x - 1| = 1$, aproximăm soluțiile ei !

Pag. 101

soluție este 25

Pag. 105. 6) c) nu are soluții 8) a) 3 și 15 și 3 + 15, c) -4 și -122 și -4 + 122, d) o singură soluție -2

Pag. 109. 3) Folosiți relațiile lui Viete, după caz b) x = -1, y = 1 m = 3 d) 31 și 26 5) 192 și 75 7) Pentru m = 2 și n = -4 8) 3 și 4 3 9) Da, pentru m = 1

Pag. 111. 2) a) $\frac{x}{2x-15}$, b) $\frac{x}{x-1}$, 3) Discriminantul este

Pag. 114. 1) a) Soluții 2 și $\frac{3}{5}$, c) nu are soluții e) nu are soluții 2) b) Nu are soluții.

Pag. 118. 1) 40 m 2) 79 și 80 cm 3) $\frac{mn}{2}$ diagonale, 20 laturi 4)

5) 4 m și 4 m, 5 m și 3,2 m 6) 12 și 8 ohmi 7) 80 cm și 100 cm

- 15) a) Soluții $\frac{1}{2} > \frac{1}{9}$ b) dacă $a < 0$, soluția este $\frac{1}{2}$ c) Se arată că $a < 0$
- 17) h) $\frac{1}{\sqrt{1+4}}$ 18) Două puncte $(0, 0)$ și $(1, 1)$ 19) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ 20) Scriind că discriminantul ecuației este 0 obținem $m^2 - 4m + 4 = 0$, de unde $m = 2$ 22) Soluție $(10, 6)$ 23) Nu are soluție
- 24) a) Pentru $a = 1$ sau $a = -9$, b) pentru $x = 3$ 25) a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 8$; b) punctul $(2, 4)$ 26) $P(4, 3)$ 27) $m = 3$, $n = 2$ 18; rădăcinile polinomului sînt 1, 2, 3 și -3 28) 60 m, 60 m și 40 m
- 29) m) $\frac{1}{2}$ 30) a) $\frac{1}{2}$

TABELUL RĂDĂCINILOR PĂTRATE ȘI CUBICE
ALE NUMERELOR NATURALE MAI MICI DECÎT 100

n	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
1	1,0000	1,0000	51	7,1414	3,7084
2	1,4142	1,2599	52	7,2111	3,7325
3	1,7321	1,4422	53	7,2801	3,7563
4	2,0000	1,5874	54	7,3485	3,7798
5	2,2361	1,7100	55	7,4162	3,8030
6	2,4495	1,8171	56	7,4833	3,8259
7	2,6458	1,9129	57	7,5498	3,8485
8	2,8284	2,0000	58	7,6158	3,8709
9	3,0000	2,0801	59	7,6811	3,8930
10	3,1623	2,1544	60	7,7460	3,9149
11	3,3166	2,2240	61	7,8102	3,9365
12	3,4641	2,2894	62	7,8740	3,9579
13	3,6056	2,3513	63	7,9373	3,9791
14	3,7417	2,4101	64	8,0000	4,0000
15	3,8730	2,4662	65	8,0623	4,0207
16	4,0000	2,5198	66	8,1240	4,0412
17	4,1231	2,5713	67	8,1854	4,0615
18	4,2426	2,6207	68	8,2462	4,0817
19	4,3589	2,6684	69	8,3066	4,1016
20	4,4721	2,7144	70	8,3666	4,1213
21	4,5826	2,7589	71	8,4261	4,1408
22	4,6904	2,8020	72	8,4853	4,1602
23	4,7958	2,8439	73	8,5440	4,1793
24	4,8990	2,8845	74	8,6023	4,1983
25	5,0000	2,9240	75	8,6603	4,2172
26	5,0990	2,9625	76	8,7178	4,2358
27	5,1962	3,0000	77	8,7750	4,2543
28	5,2915	3,0366	78	8,8318	4,2727
29	5,3852	3,0723	79	8,8882	4,2908
30	5,4772	3,1072	80	8,9443	4,3089

n	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
31	5,5678	3,1414	81	9,0000	4,3267
32	5,6569	3,1748	82	9,0554	4,3445
33	5,7446	3,2075	83	9,1104	4,3621
34	5,8310	3,2396	84	9,1652	4,3795
35	5,9161	3,2711	85	9,2195	4,3968
36	6,0000	3,3019	86	9,2736	4,4140
37	6,0828	3,3322	87	9,3274	4,4310
38	6,1644	3,3620	88	9,3808	4,4480
39	6,2450	3,3912	89	9,4340	4,4647
40	6,3246	3,4200	90	9,4868	4,4814
41	6,4031	3,4482	91	9,5394	4,4979
42	6,4807	3,4760	92	9,5917	4,5144
43	6,5574	3,5034	93	9,6437	4,5307
44	6,6332	3,5303	94	9,6954	4,5468
45	6,7082	3,5569	95	9,7468	4,5629
46	6,7823	3,5830	96	9,7980	4,5789
47	6,8557	3,6088	97	9,8489	4,5947
48	6,9287	3,6342	98	9,8995	4,6104
49	7,0000	3,6593	99	9,9499	4,6261
50	7,0711	3,6840	100	10,0000	4,6416

CUPRINS

Cap. I Numere

1. Exerciții și probleme recapitulative	3
2. Ridicarea la putere	4
3. Proprietățile ridicării la putere	5
4. Puteri cu exponent (întreg) negativ	9
5. Aplicații	13
6. Intervale	14
7. Aproximări și aproximații	20
8. Ecuații și sisteme de ecuații	23
9. Probleme	34
10. Rădăcina pătrată și cubică	36

Cap. II Funcții

1. Noțiunea de funcție	44
2. Funcții liniare	48
3. Funcții pătratice	51
4. Alte funcții	55

Cap. III Polinoame și fracții raționale

1. Polinoame. Operații cu polinoame	57
2. Împărțirea polinoamelor	58
3. Divizibilitatea polinoamelor. Polinoame ireductibile	61
4. Împărțirea prin binomul $X-a$	63
5. Descompunerea polinoamelor în factori. Formule speciale	66
6. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două polinoame	69
7. Funcții polinomiale și ecuații polinomiale. Teorema lui Bézout	74
8. Fracții raționale. Amplificarea și simplificarea	77
9. Valorile unei fracții raționale. Fracții raționale	79
10. Operații cu fracții raționale	80

Cap. IV Ecuații de gradul al doilea

1. Prezentare	92
2. Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea. Cazuri speciale	94
3. Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea. Formula de rezolvare	97
4. Ecuații echivalente cu ecuații de gradul al II-lea	102
5. Relații între rădăcinile și coeficienții trinomului de gradul al II-lea	106
6. Descompunerea în factori a trinomului de gradul al II-lea	110
7. Ecuații care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații de gradul al II-lea	111
8. Probleme	114

Cap. V Exerciții și probleme

1. Exerciții și probleme suplimentare	120
2. Exerciții și probleme recapitulative	125
3. Probleme deosebite. Curiozități	126
4. Olimpiade și concursuri	128

Indicații și răspunsuri	132
-------------------------------	-----

